電子情報通信学会総合大会 チュートリアル講演
「通信ネットワークの現代的な課題にチャレンジする基礎理論の新展開」

ネットワークダイナミクスの摂動論における ラプラス変換とレゾルベント

会田 雅樹

東京都立大学

2022 年 3 月 16 日

はじめに

- レゾルベントとは
  ⇒ 線形代数の世界と複素解析の世界を結びつける概念
- レゾルベントがネットワーク研究にどう役に立つか？
  ⇒ ネットワークダイナミクスの摂動論を例に解説

一般論としての背景 (1)

- NW (ノード数 n) 上の各種ダイナミクスを考える際に，頻出する微分方程式の形 (例えば，連続時間マルコフ連鎖，拡散方程式，波動方程式)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}(t) \qquad (1)$$

但し，$\boldsymbol{M}$：NW 構造を反映した $n \times n$ 正方行列．
$\boldsymbol{x}(t)$：時刻 t における各ノードの状態を表す n 次元列ベクトル．

- 形式的な解

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(\boldsymbol{M}t)\,\boldsymbol{x}(0)$$

- 行列の指数関数の意味 ($\boldsymbol{I}$ は単位行列)

$$\exp(\boldsymbol{M}t) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{M}t)^k}{k!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}t + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{M}t)^2 + \frac{1}{3!}(\boldsymbol{M}t)^3 + \cdots$$

解の振る舞いを理解するには，全ての $k = 0, 1, 2, \ldots$ について $\boldsymbol{M}^k$ を知っている必要がある．

一般論としての背景 (2)

- 有用な形式の解を得るには，適当な行列 P を用いた相似変換で M を $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n)$ のように対角化する．
- (1) の両辺に左から $\boldsymbol{P}^{-1}$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t)) = (\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{P})\,(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t))$$

- 方程式の解となるベクトル $\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{x}(t)$ は

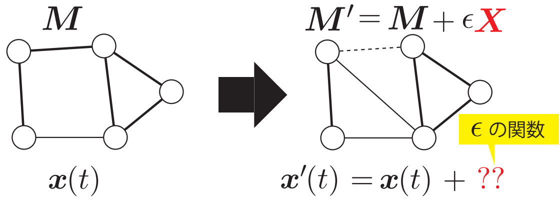
$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t) &= \exp[\mathrm{diag}(\lambda_1\,t,\,\ldots,\,\lambda_n\,t)]\,\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)\\ &= \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\,\ldots,\,\mathrm{e}^{\lambda_n t})\,\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)\end{aligned}$$

- 最終的に以下の (閉形式) 解を得る．

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\,\ldots,\,\mathrm{e}^{\lambda_n t})\,\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{x}(0)$$

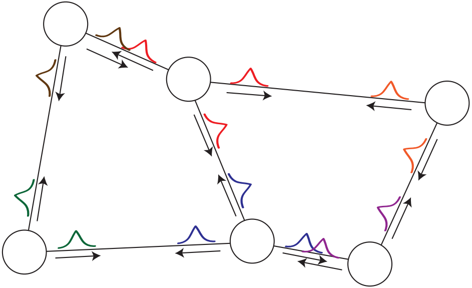
ネットワークの摂動論

- ネットワーク構造が僅かに変化して，行列が $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}'$ となったときの解を考える．
- 勿論，新たに $\boldsymbol{M}'$ を対角化すれば，対応する解 $\boldsymbol{x}'(t)$ は算出可能．
  $\Rightarrow$ ここでは議論しない．
- ネットワークの摂動論とは，ネットワーク構造の変化の大きさを特徴づけるパラメータ ϵ (≤ 1) を導入し，新しい解 $\boldsymbol{x}'(t)$ が元の解 $\boldsymbol{x}(t)$ と ϵ を用いてどのように表されるかを考察するもの．
- これにより，ネットワーク構造の変化が解に与える影響を解析的に考察することが可能．



オンラインユーザダイナミクス

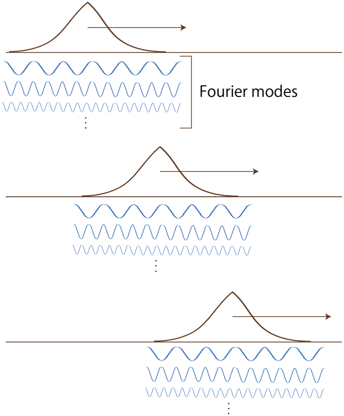
- オンラインソーシャルネットワーク (OSN) のユーザは互いに影響を与えあっているはずである．



- オンラインユーザダイナミクスのモデル化の前提：
  - その影響は OSN を介して伝播する
  - 影響の伝播速度は有限である

ネットワーク上の波動方程式

- 有限速度での影響の伝播：



- 影響の波形をフーリエ展開すると，三角関数が一定速度で伝搬する．
  $\Rightarrow$ **振動モデル**（ネットワーク上の波動方程式のモデル）が必要

ユーザダイナミクスの波動方程式

- 出発点の微分方程式 (波動方程式)：

$$\pm\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{x}^{\pm}(t) = \boldsymbol{\mathcal{H}}\,\boldsymbol{x}^{\pm}(t) \quad \text{(複号同順)}$$

  但し，$\boldsymbol{\mathcal{H}} := \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{I}}$ のうち，$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ が既知の NW 構造，$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{I}}$ が NW 構造の変化分．$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ は $\boldsymbol{\mathcal{H}}^2$ がラプラシアン行列となる半正定値行列．
- 既知の構造 $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ を対角化 ($\boldsymbol{\Omega}_0$) した表示で表し，$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{I}}$ に対応する部分 ($\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}$) にパラメータ ϵ を付与：

$$\boldsymbol{\Omega}(\epsilon) := \boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}$$

- $\epsilon = 0$ に対応する以下の方程式の解 $\psi_0^{\pm}(t)$ は既知．

$$\pm\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\psi_0^{\pm}(t) = \boldsymbol{\Omega}_0\,\psi_0^{\pm}(t)$$

- $\epsilon > 0$ に対応する波動方程式 (但し $\psi^{\pm}(0;t) = \psi_0^{\pm}(t)$)

$$\pm\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\psi^{\pm}(\epsilon;t) = \boldsymbol{\Omega}(\epsilon)\,\psi^{\pm}(\epsilon;t) = (\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\,\psi^{\pm}(\epsilon;t)$$

ネットワークの摂動論

- 波動方程式 (再掲)

$$\pm\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\psi}^{\pm}(\epsilon;t) = (\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\,\boldsymbol{\psi}^{\pm}(\epsilon;t) \tag{2}$$

- (2) の形式的な解は

$$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(\epsilon;t) = \exp\left[\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\,t\right]\,\boldsymbol{\psi}^{\pm}(\epsilon;0)$$

- $(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})^k$ が未知なので，このままでは解の振る舞いが不明．
- 摂動論とは，(2) の解 $\psi^{\pm}(\epsilon;t)$ を ϵ の冪級数で

$$\boldsymbol{\psi}^{\pm}(\epsilon;t) = \boldsymbol{\psi}_0^{\pm}(t) + \epsilon\,\boldsymbol{\psi}_1^{\pm}(t) + \epsilon^2\,\boldsymbol{\psi}_2^{\pm}(t) + \epsilon^3\,\boldsymbol{\psi}_3^{\pm}(t) + \cdots$$

  のように展開し，ϵ^k のオーダ毎に $\psi_k^{\pm}(t)$ を算出する方法．
- $\epsilon \ll 1$ であれば，ϵ の低次の冪までの近似であっても良い精度の近似が可能．
- 解を ϵ で微分することにより，ネットワーク構造変化の影響を調べることもできる．

摂動展開と畳み込みの多重積分

$\psi^{\pm}(\epsilon; t) = \exp\left[\mp \mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\, t\right] \psi^{\pm}(\epsilon; 0)$ の行列指数関数部分の展開

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[\mp \mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\, t\right] \\
&\quad = \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\, t\right] \\
&\qquad + \int_0^t \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t - t_1)\right] \left(\mp \mathrm{i}\epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}\right) \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\, t_1\right] \mathrm{d}t_1 \\
&\qquad + \int_0^t \int_0^{t_1} \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t - t_1)\right] \left(\mp \mathrm{i}\epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}\right) \\
&\qquad\qquad \times \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t_1 - t_2)\right] \left(\mp \mathrm{i}\epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}\right) \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\, t_2\right] \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 \\
&\qquad + \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t - t_1)\right] \left(\mp \mathrm{i}\epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}\right) \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t_1 - t_2)\right] \left(\mp \mathrm{i}\epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}\right) \\
&\qquad\qquad \times \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t_2 - t_3)\right] \left(\mp \mathrm{i}\epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}\right) \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\, t_3\right] \mathrm{d}t_3\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 \\
&\qquad + \cdots
\end{aligned} \tag{3}
$$

ϵ^k の項の評価には k 重の畳み込み積分を計算する必要がある．

準備1：ラプラス変換と畳み込み

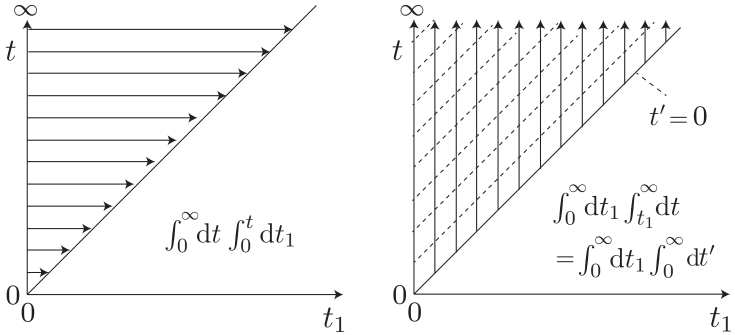
- $t \geq 0$ で定義された $f(t)$ と $g(t)$ のラプラス変換 (但し $\Re[s] > 0$)

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t, \quad G(s) := \int_0^\infty g(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

- $h(t)$ を $f(t)$ と $g(t)$ の畳み込み $h(t) := \int_0^t f(t_1)\,g(t-t_1)\,\mathrm{d}t_1$ とする．
- $h(t)$ のラプラス変換 $H(s)$ は $F(s)$ と $G(s)$ の積でかける．

$$\begin{aligned}
{\color{red}H(s)} &= \int_0^\infty h(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t_1)\,g(t-t_1)\,\mathrm{d}t_1\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^\infty \mathrm{d}t\, f(t_1)\,\mathrm{e}^{-st_1}\,g(t-t_1)\,\mathrm{e}^{-s\,(t-t_1)} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}t_1 \int_0^\infty \mathrm{d}t'\, f(t_1)\,\mathrm{e}^{-st_1}\,g(t')\,\mathrm{e}^{-st'} = {\color{red}F(s)\,G(s)}
\end{aligned}$$

ラプラス変換の畳み込みに用いた積分順序交換



準備２：レゾルベント

- ある行列 $\boldsymbol{M}$ について $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})$ の逆行列が存在するとすれば，
$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{M}^3 + \cdots$$
但し $\boldsymbol{I}$ は単位行列．
- 同様に $(\boldsymbol{I} - \frac{1}{z}\boldsymbol{M})$ の逆行列は
$$\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{z}\boldsymbol{M}\right)^{-1} = \boldsymbol{I} + \frac{1}{z}\boldsymbol{M} + \frac{1}{z^2}\boldsymbol{M}^2 + \frac{1}{z^3}\boldsymbol{M}^3 + \cdots$$
- $(z\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}) = z\,(\boldsymbol{I} - \frac{1}{z}\boldsymbol{M})$ の逆行列は
$$(z\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1} = \frac{1}{z}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{z}\boldsymbol{M}\right)^{-1} = \frac{1}{z}\boldsymbol{I} + \frac{1}{z^2}\boldsymbol{M} + \frac{1}{z^3}\boldsymbol{M}^2 + \frac{1}{z^4}\boldsymbol{M}^3 + \cdots$$
- 行列 $(z\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}$ を行列 $\boldsymbol{M}$ のレゾルベントという．

準備３：コーシーの積分定理と留数定理

- (コーシーの積分定理) 複素関数 $f(z)$ が単純閉曲線 C (自身と交わらない閉じた曲線) とその内部の領域で正則であるとき，以下の性質が成り立つ．

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

- (留数定理) $f(z)$ が C の内部の点 $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ に極を持つとき，閉曲線 C の反時計回りに積分を実行すると

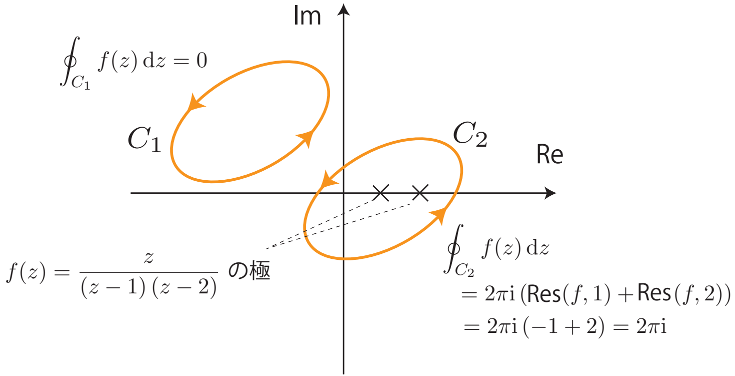
$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_i \mathrm{Res}(f, a_i)$$

である．但し，$\mathrm{Res}(f, a_i)$ は点 a_i における $f(z)$ の極の留数 (極 a_i の回りでローラン展開したときの $1/(z-a_i)$ の項の係数)．

留数定理の例

- 以下の関数の極 $z = 1, 2$ を含まない閉曲線 C_1 と含んだ閉曲線 C_2 での周回積分．

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$



摂動展開のラプラス変換

- 摂動展開 (3) に現れる畳み込み積分をラプラス変換を用いて表す.
- 元の関数とラプラス変換の対応関係：

$$\begin{aligned} \exp\left[\mp \mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,t\right] &\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{H}^{\pm}(s) \\ \exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,t\right] &\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{F}^{\pm}(s) \\ (\mp \mathrm{i}\epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,\exp\left[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,t\right] &\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{G}^{\pm}(s) \end{aligned}$$

- ラプラス変換を用いて摂動展開 (3) を表すと.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{\pm}(s) &= \boldsymbol{F}^{\pm}(s) + \boldsymbol{F}^{\pm}(s)\,\boldsymbol{G}^{\pm}(s) + \boldsymbol{F}^{\pm}(s)\,\boldsymbol{G}^{\pm}(s)^2 + \cdots \\ &= \boldsymbol{F}^{\pm}(s)\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{G}^{\pm}(s)^k \end{aligned}$$

- $\exp\left[\mp \mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,t\right]$ を求めるにはラプラス逆変換 (但し $c > 0$)

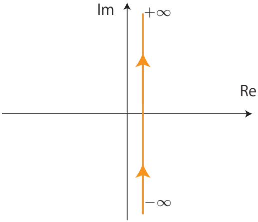
$$\exp\left[\mp \mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,t\right] = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}p}^{c+\mathrm{i}p}\boldsymbol{H}^{\pm}(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

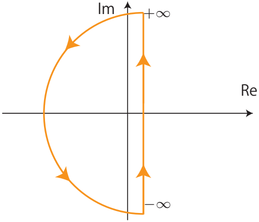
ラプラス逆変換

- ラプラス逆変換 (ブロムウィッチ積分) の再掲

$$\exp\left[\mp \mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\, \boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\, t\right] = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}p}^{c+\mathrm{i}p} \boldsymbol{H}^{\pm}(s)\, \mathrm{e}^{st}\, \mathrm{d}s \qquad (4)$$

- ブロムウィッチ積分の積分路は左図であるが，実際に積分を実行するときには留数定理を使うため，右図ような積分路をとり，円弧部分の積分路の寄与が 0 になる閉路に沿った積分を考える．





ラプラス逆変換とレゾルベント (1)

- ブロムウィッチ積分 (4) の積分路は複素平面上の虚軸に沿っているが，変数変換して実軸に沿った積分にすると，被積分関数の行列 $\boldsymbol{H}^{\pm}(s)$ が変換されて扱いやすい形になる．
- $\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{\Omega}(\epsilon)$ が可換であることを用いて指数関数をまとめると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{\pm}(s) &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \exp[\mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}(\epsilon)\, t]\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \exp\left[\left(-s\boldsymbol{I} \mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}(\epsilon)\right) t\right]\, \mathrm{d}t \\
&= \left(-s\boldsymbol{I} \mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}(\epsilon)\right)^{-1} \Big[\exp[(-s\boldsymbol{I} \mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}(\epsilon))\, t]\Big]_{t=0}^{\infty} \\
&= -\left(-s\boldsymbol{I} \mp \mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}(\epsilon)\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

- $s = -\mathrm{i}z$ とすると $\pm\boldsymbol{\Omega}(\epsilon)$ のレゾルベントを用いて

$$
\boldsymbol{H}^{\pm}(s) = +\mathrm{i}\left(z\boldsymbol{I} \mp \boldsymbol{\Omega}(\epsilon)\right)^{-1}
$$

ラプラス逆変換とレゾルベント (2)

- $\pm\boldsymbol{\Omega}(\epsilon)$ のレゾルベントを $\boldsymbol{R}^{\pm}(z)$

$$\boldsymbol{R}^{\pm}(z) := \left(z\,\boldsymbol{I} \mp \boldsymbol{\Omega}(\epsilon)\right)^{-1}$$

とし，$\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\,\mathrm{d}z$ であることを用いると，

$$\boldsymbol{H}^{\pm}(s)\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{R}^{\pm}(z)\,\mathrm{d}z$$

- 以上からブロムウィッチ積分 (4) はレゾルベント $\boldsymbol{R}^{\pm}(z)$ を用いて表現できる．

$$\exp\left[\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\,t\right] = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathrm{i}c+p}^{\mathrm{i}c-p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt}\,\boldsymbol{R}^{\pm}(z)\,\mathrm{d}z$$

- これを積分の方向に注意して書き直すと

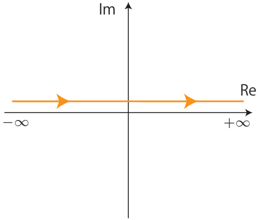
$$\exp\left[\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\,t\right] = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathrm{i}c-p}^{\mathrm{i}c+p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt}\,\left(-\boldsymbol{R}^{\pm}(z)\right)\mathrm{d}z \qquad (5)$$

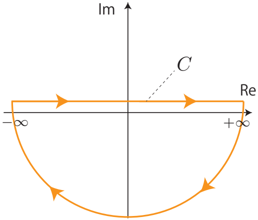
ラプラス逆変換とレゾルベント (3)

- 実軸に沿った積分 (5) を留数定理を適用するための閉路に沿った積分に変換

$$\exp\left[\mp \mathrm{i}(\mathbf{\Omega}_0 + \epsilon\,\mathbf{\Omega}_\mathrm{I})\,t\right] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \exp(-\mathrm{i}zt)\left(-\boldsymbol{R}^{\pm}(z)\right)\mathrm{d}z \tag{6}$$

- 実軸に沿った積分路は左図．留数定理を適用するための積分路は右図．





レゾルベントの摂動展開

- 作用素の恒等式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{B}^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^{-1}) - (\boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}^{-1} \\ &= \boldsymbol{A}^{-1}\,(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}^{-1} \end{aligned}$$

- これを $\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z) := (z\,\boldsymbol{I} \mp \boldsymbol{\Omega}_0)^{-1}$ と $\boldsymbol{R}^{\pm}(z) = (z\,\boldsymbol{I} \mp \boldsymbol{\Omega}(\epsilon))^{-1}$ に適用．$\boldsymbol{\Omega}(\epsilon) = \boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}$ より

$$\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z) - \boldsymbol{R}^{\pm}(z) = \boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)\,(\mp\epsilon\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\,\boldsymbol{R}^{\pm}(z)$$

- この関係式から，$-\boldsymbol{R}^{\pm}(z)$ は既知の $\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)$ と $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}$ を用いて

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{R}^{\pm}(z) &= -\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z) - \boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)\,(\mp\epsilon\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}})\,(-\boldsymbol{R}^{\pm}(z)) \\ &= -\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mp\epsilon\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{I}}\,(-\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z))\right)^k \end{aligned}$$

と書ける．

結局，何を計算すればよいか？

- $\psi^{\pm}(\epsilon;t) = \exp\left[\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,t\right]\,\psi^{\pm}(\epsilon;0)$ のオリジナルな摂動展開

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,t\right] \\
&= \exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,t\right] \\
&\quad + \int_0^t \exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t-t_1)\right]\,(\mp\mathrm{i}\epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,\exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,t_1\right]\,\mathrm{d}t_1 \\
&\quad + \int_0^t\int_0^{t_1} \exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t-t_1)\right]\,(\mp\mathrm{i}\epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I}) \\
&\qquad\qquad \times \exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t_1-t_2)\right]\,(\mp\mathrm{i}\epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,\exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,t_2\right]\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 \\
&\quad + \int_0^t\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t-t_1)\right]\,(\mp\mathrm{i}\epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,\exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t_1-t_2)\right]\,(\mp\mathrm{i}\epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I}) \\
&\qquad\qquad \times \exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,(t_2-t_3)\right]\,(\mp\mathrm{i}\epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,\exp\left[\mp\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}_0\,t_3\right]\,\mathrm{d}t_3\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

- ラプラス変換とレゾルベントを用いた摂動展開

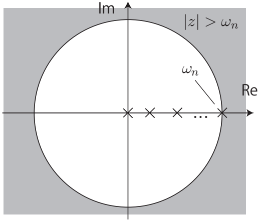
$$
\exp\left[\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0 + \epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,t\right] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \exp(-\mathrm{i}zt)\,\left(-\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mp\epsilon\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I}\,\left(-\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)\right)\right)^k\,\mathrm{d}z \tag{7}
$$

$R_0^{\pm}(z)$ の成分表示 (1)

- $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathrm{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ で $0 = \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n$ とする．
- $R_0^{\pm}(z)$ の具体的な成分を考えるため，展開した形で表す．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z) &:= (z\,\boldsymbol{I} \mp \boldsymbol{\Omega}_0)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{z}\boldsymbol{I} \pm \frac{1}{z^2}\boldsymbol{\Omega}_0 + \frac{1}{z^3}\boldsymbol{\Omega}_0^2 \pm \frac{1}{z^4}\boldsymbol{\Omega}_0^3 + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

- 但し，$\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)$ が正則な領域 $|z| > \omega_n$ での展開．



$R_0^{\pm}(z)$ の成分表示 (2)

- μ 番目 $(1 \le \mu \le n)$ の対角成分に注目する．
- $|z| \le \omega_n$ であっても特異点 $z = \omega_\mu$ の周りでローラン展開できる．

$$\frac{1}{z}\left(1 \pm \frac{\omega_\mu}{z} + \frac{\omega_\mu^2}{z^2} \pm \cdots\right) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1 \mp (\omega_\mu / z)} = \frac{1}{z \mp \omega_\mu}$$

- $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathrm{diag}(\omega_0, \ldots, \omega_n)$ だから，普通に計算したときと同じ．

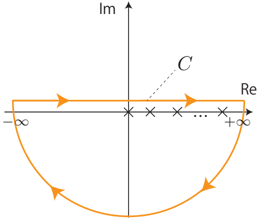
$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_0^{\pm}(z) &= (z\boldsymbol{I} \mp \boldsymbol{\Omega}_0)^{-1} = \mathrm{diag}(z \mp \omega_1, \ldots, z \mp \omega_n)^{-1} \\ &= \mathrm{diag}\left(\frac{1}{z \mp \omega_1}, \ldots, \frac{1}{z \mp \omega_n}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z \mp \omega_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{z \mp \omega_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{z \mp \omega_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

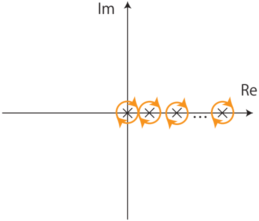
レゾルベントを用いた摂動展開と留数定理

- レゾルベントを用いた摂動展開における被積分関数の極は，$\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)$ に由来する $\boldsymbol{\Omega}_0$ の固有値のみ．

$$\exp\left[\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{\Omega}_0+\epsilon\,\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I})\,t\right]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\exp(-\mathrm{i}zt)$$
$$\times\left(-\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mp\epsilon\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{I}\left(-\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z)\right)\right)^k\mathrm{d}z$$

- 積分路 C と極の分布が左図．留数定理を適用すると極の周りの留数で積分を評価可能 (右図：複号の上側の場合)．



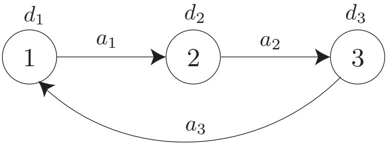


適用例：ネットワークモデル

- 3 ノードからなるネットワークモデル：

$$\boldsymbol{\Omega}(\epsilon) = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} d_1 & -a_1 & 0 \\ 0 & d_2 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_1' & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2' & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3' \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- 但し $\omega_\mu' := \omega_\mu + \epsilon d_\mu$
- 例として，3 次の摂動の第一成分を考える．

$$\boldsymbol{\psi}_3^\pm(t) = (\psi_3^\pm(1,t), \psi_3^\pm(2,t), \psi_3^\pm(3,t))^\top$$

適用例：畳み込みの多重積分による評価

- 3 次の摂動：3 重積分を評価

$$\psi_3^{\pm}(1,t) = \left(\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\,\omega_1'(t-t_1)}\,(\mp\mathrm{i}\,a_1)\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\,\omega_3'(t_1-t_2)}(\mp\mathrm{i}\,a_2) \right.$$
$$\left. \times\ \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\,\omega_2'(t_2-t_3)}(\mp\mathrm{i}\,a_3)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\,\omega_1' t_1}\,\mathrm{d}t_3\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 \right) \psi^{\pm}(1,0)$$
$$= \left(\frac{\mp a_1\,a_2\,a_3\,(\mathrm{i}t)\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega_1' t}}{(\pm\omega_1' \mp \omega_2')(\pm\omega_1' \mp \omega_3')} + \frac{\mp a_1\,a_2\,a_3\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega_1' t}}{(\pm\omega_1' \mp \omega_2')^2(\pm\omega_1' \mp \omega_3')} \right.$$
$$+ \frac{\mp a_1\,a_2\,a_3\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega_1' t}}{(\pm\omega_1' \mp \omega_2')(\pm\omega_1' \mp \omega_3')^2} + \frac{\pm a_1\,a_2\,a_3\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\,\omega_2' t}}{(\pm\omega_2' \mp \omega_1')^2(\pm\omega_2' \mp \omega_3')}$$
$$\left. + \frac{\pm a_1\,a_2\,a_3\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\,\omega_3' t}}{(\pm\omega_3' \mp \omega_1')^2(\pm\omega_3' \mp \omega_2')} \right) \psi^{\pm}(1,0)$$

適用例：レゾルベントと留数定理を用いた評価

- 3 次の摂動：留数定理で積分を評価

$$
\begin{aligned}
\psi_3^{\pm}(1,t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \Biggl(\oint_C \exp(-\mathrm{i}zt) \frac{-1}{z \mp \omega_1'} (\mp(-a_3)) \frac{-1}{z \mp \omega_3'} \\
\times (\mp(-a_2)) \frac{-1}{z \mp \omega_2'} (\mp(-a_1)) \frac{-1}{z \mp \omega_1'} \mathrm{d}z \Biggr) \psi^{\pm}(1,0) \\
= \Biggl(\frac{\mp a_1\, a_2\, a_3\, (\mathrm{i}t)\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\omega_1' t}}{(\pm\omega_1' \mp \omega_2')(\pm\omega_1' \mp \omega_3')} + \frac{\mp a_1\, a_2\, a_3\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\omega_1' t}}{(\pm\omega_1' \mp \omega_2')^2(\pm\omega_1' \mp \omega_3')} \\
+ \frac{\mp a_1\, a_2\, a_3\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\omega_1' t}}{(\pm\omega_1' \mp \omega_2')(\pm\omega_1' \mp \omega_3')^2} + \frac{\pm a_1\, a_2\, a_3\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\,\omega_2' t}}{(\pm\omega_2' \mp \omega_1')^2(\pm\omega_2' \mp \omega_3')} \\
+ \frac{\pm a_1\, a_2\, a_3\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\,\omega_3' t}}{(\pm\omega_3' \mp \omega_1')^2(\pm\omega_3' \mp \omega_2')} \Biggr) \psi^{\pm}(1,0)
\end{aligned}
$$

おわりに

- ネットワーク分野の研究に役立つ (かもしれない) レゾルベントの概念とその応用方法を解説した．
- レゾルベントを用いることで畳み込みの多重積分を回避し，高次の摂動計算を見通しよく実行可能．
- $\boldsymbol{R}_0^{\pm}(z) = (z\boldsymbol{I} \mp \boldsymbol{\Omega}_0)^{-1}$ の成分

$$\frac{1}{z - \omega_\mu}$$

は，物理学においてグリーン関数，またはプロパゲータなどと呼ばれるものに対応．