

## [招待講演]

# ネット炎上を含むネットワーク上の爆発的なユーザダイナミクスのモデル化と対策

会田 雅樹

首都大学東京

January 18, 2018

# 背景

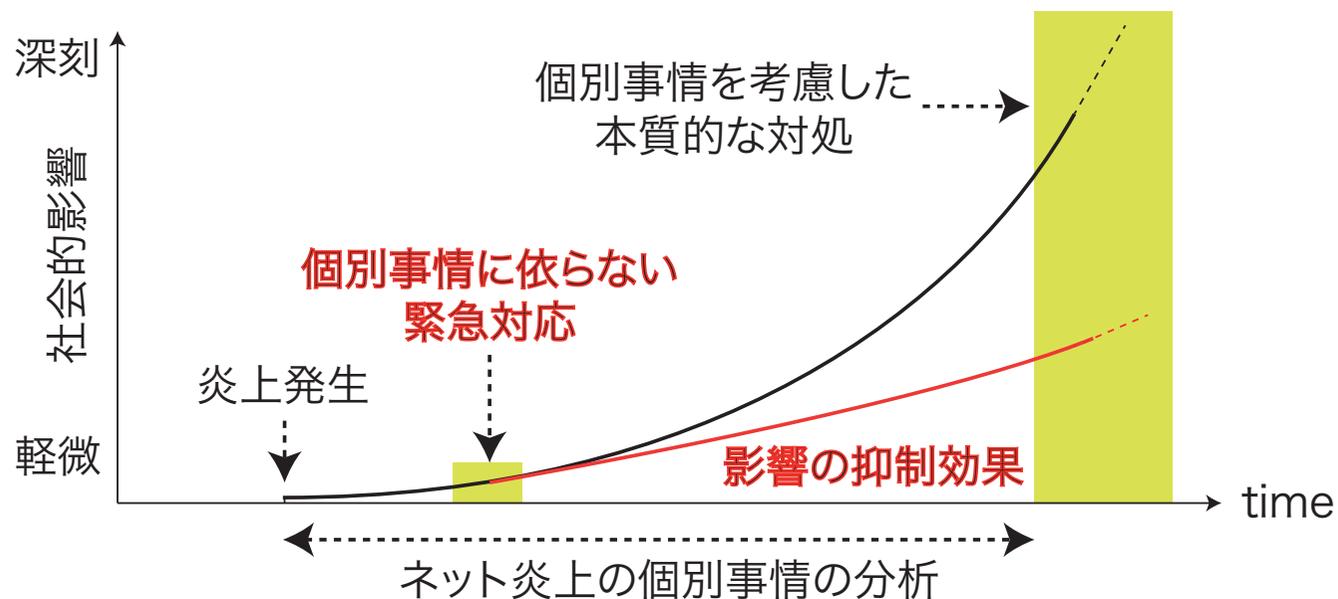
- 情報ネットワークの発展・普及
  - ⇒ 社会ネットワーク上の情報交換やアクティビティの伝播が活性化
  - ⇒ そこから生まれるダイナミクスは興味深い研究対象！
- 情報ネットワークとユーザの結びつきは密接化し，情報ネットワーク単体でダイナミクスを論じることは不可能.
  - ⇒ ユーザ行動の与える影響を考慮すべき.
- 特に，ネット炎上などの Online Social Network の爆発的ダイナミクスが引き起こす問題：
  - 情報ネットワークの安定運用を妨げる危険あり
  - 実世界の社会活動に対しても悪影響が及ぶ危険あり

ネット炎上の発生防止や拡大の抑制を実現する技術が必要

- 1 ネット炎上の発生メカニズムの工学的理解
- 2 発生メカニズムの理解に基づいた対策技術の開発

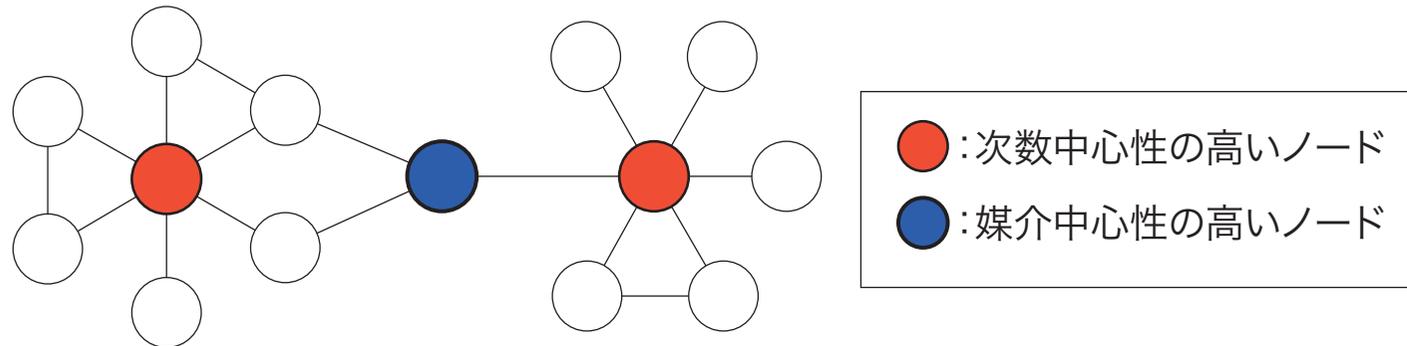
# ネット炎上の工学モデルの位置づけ

- ネット炎上のモデル化の方向性
  - 個々の炎上の事情を考慮 ⇒ 社会学的, 行動心理学的分析
  - 個々の炎上の事情を無視 ⇒ 個別事情に依らない普遍モデル
- モデルの普遍性の意味 (本来は背後に人々の営みや個別の事情あり)
  - 電話網: 発呼はランダム ⇒ 個別事情を考慮せず設計可
  - ネット炎上: 原因は?? (後述) ⇒ 個別事情が不明でも緊急対応可



# ノード中心性

- ノード中心性：NW 内でのノードの働きの強さ
- ノードの働きの尺度によって多様な中心性の定義あり



- 次数中心性：ノード次数の大きいノードを高く評価。  
⇒ ノード次数の大きいノードは情報伝播に強く関与するから
- 媒介中心性：ノード間の最短経路の通過数が多いノードを高く評価。  
⇒ 通信経路の要としての重要性を評価するため
- ネットワークトポロジのみで決まる (ノードに偏りのない通信)
- より現実的な状況へのノード中心性の拡張が可能 (後述)
- ネット炎上 := 拡張したノード中心性が時間と共に発散 (後述)

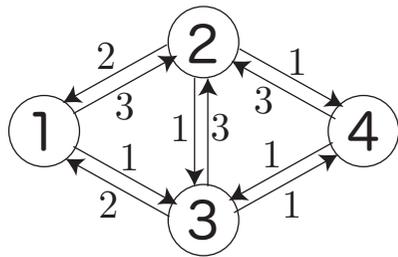
# 発表の概要

- 有向グラフの分類：対称化可能な有向グラフ&その他の有向グラフ
- 対称化可能な有向グラフ上での振動モデル
- ノードの振動エネルギーとノード中心性, ノード中心性の拡張
- 一般の有向グラフ上の振動モデル
- ネット炎上のモデル
- ネット炎上の対策技術
- 有向グラフ上の振動モデルの基礎方程式と量子論

# Laplacian 行列の定義

- $n$  ノード  $\{1, 2, \dots, n\}$  からなる有向グラフ:  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$
- ノード  $i$  から  $j$  に向かう有向リンク  $i \rightarrow j$  の重み:  $w_{ij} > 0$
- $\mathbf{A}$ : 重み付き隣接行列  $\mathbf{A} = [w_{ij}]$
- $\mathbf{D} := \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ : 出次数行列, 但し  $d_i = \sum_{j \in \partial_i} w_{ij}$
- **Laplacian 行列**の定義:

$$\mathcal{L} := \mathbf{D} - \mathbf{A}$$

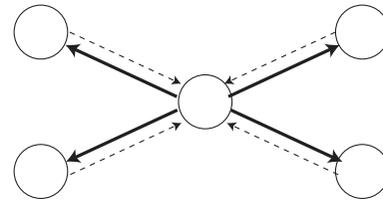


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

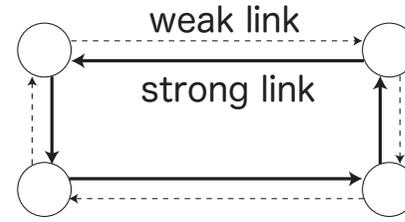
- 有向グラフの Laplacian 行列  $\mathcal{L}$  は一般に**非対称行列**である。
- 数学的な分析の容易さからいえば, 対称行列であると望ましい。

# リンクの非対称性の分類

- 典型的な非対称リンクの例：

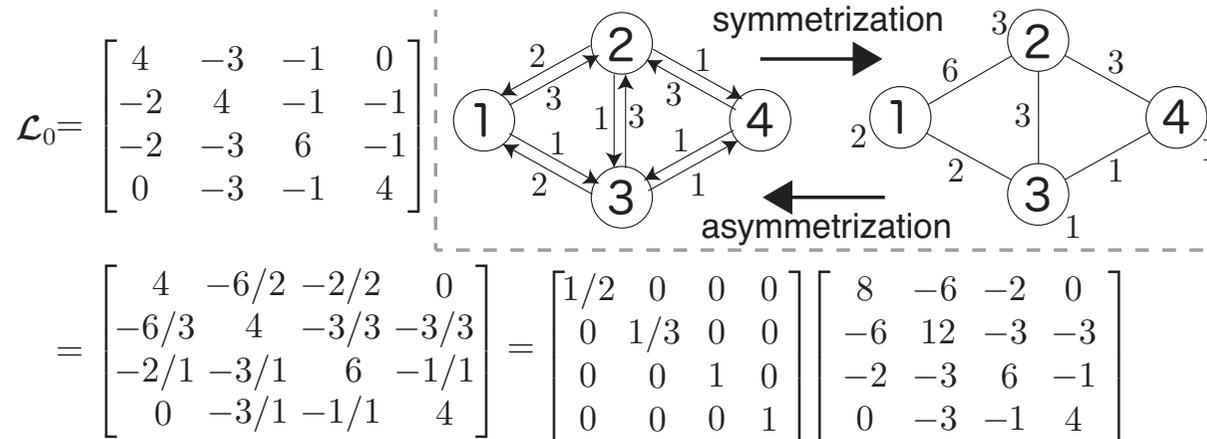


(a) hub type relation



(b) cyclic relation

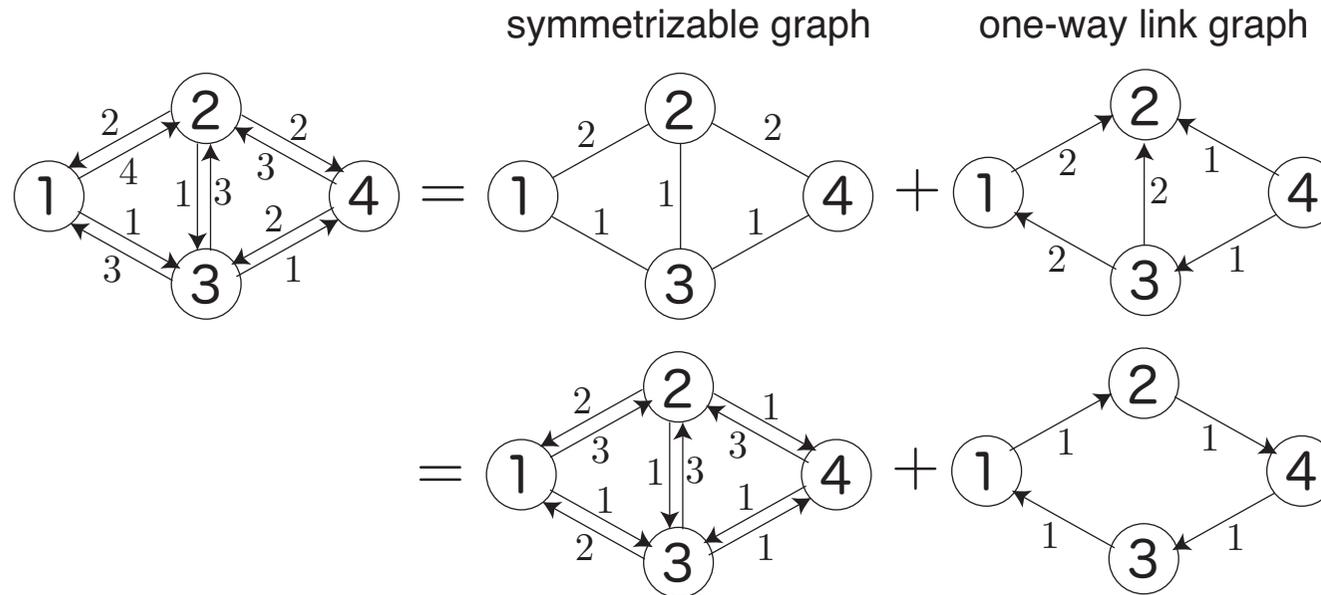
- (a) はリンクの非対称性を **ノード特性に還元しリンクの対称化が可**
- (b) はリンク非対称性は **リンク固有の性質**で、リンクの対称化が不可
- 対称化可能グラフの例： $\mathcal{L}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L}$  (対角行列  $\times$  対称 Laplacian 行列)



- 対称化の条件： $\mathbf{M} = (m_1, \dots, m_n)$  に対して  $m_i w_{ij} = m_j w_{ji}$

# 一般の有向グラフの分解 (1)

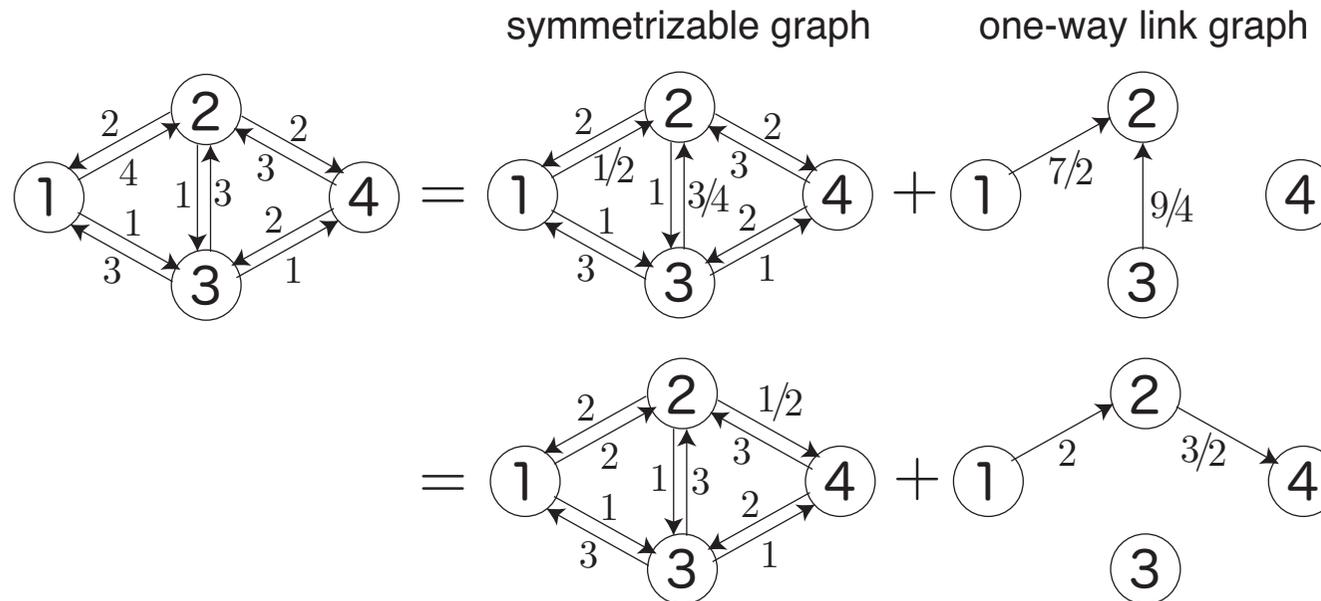
- 一般の有向グラフは「対称化可能グラフ」と「一方向リンクグラフ」に分解可能.



- 双方向リンクの重みの小さい方とそれ以外に分離 (一番目の分解) :  
⇒ 「無向グラフ」と「一方向リンクグラフ」に分解可.  
(注: 無向グラフは対称化可能グラフの一種)
- 二番目の分解に現れる「対称化可能グラフ」は前スライドで議論した有向グラフと同じ.

## 一般の有向グラフの分解 (2)

- 以上の例からわかること：  
一般のグラフは「対称化可能グラフ」と「一方向リンクグラフ」に常に分解可能であり，その分解は一意的ではない。
- その他の分解の例：



- 分解に自由度があることは，ネット炎上を制御する時に役に立つ。

# ノード間相互作用のミニマルモデル (1)

- **ミニマルモデル**とは：出来る限り単純で普遍性のあるモデル
- 時刻  $t$  におけるノード  $i$  の状態を表す量を  $x_i(t)$  とする.  
⇒ 最も単純なモデルとして「**一次元の変数**」で表されるとする.
- 隣接ノード  $i-j$  間には、互いの状態量が等しくなるように「復元力」が働くとする.
- ノード  $i$  に対して隣接ノード  $j$  から働く力の大きさは、状態量の差  $\Delta x = x_i(t) - x_j(t)$  の関数  $f(\Delta x)$  であるとして以下を仮定：
  - $\Delta x = 0$  なら  $f(\Delta x) = 0$  である.
  - $f(\Delta x)$  は  $\Delta x$  の単調増加関数である.

## ノード間相互作用のミニマルモデル (2)

- ノード間に働く力の大きさ  $f(\Delta x)$  を Taylor 展開すれば

$$f(\Delta x) = -w_{ij} \Delta x + O((\Delta x)^2)$$

ここで,  $w_{ij} > 0$  で, 一般に  $w_{ij} \neq w_{ji}$  であってよい.

- 類似の例: オームの法則



- 以上から, ノード  $i$  に対してノード  $j$  から線形な復元力

$$-w_{ij} (x_i(t) - x_j(t))$$

が働くモデルは,  $\Delta x \ll 1$  において**広いクラスのノード間相互作用が共通して含む基本的なダイナミクス**を記述する.

# 対称化可能な有向グラフ上のユーザダイナミクス (1)

- ネットワーク上のユーザの状態  $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  の運動方程式:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -\mathcal{L}_0 \mathbf{x}(t) \quad (1)$$

- $\mathcal{L}_0 = M^{-1} L$  だから, 両辺に左から  $M$  を掛けると, 運動方程式は以下のように書ける.

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -L \mathbf{x}(t)$$

リンクの非対称性がノードの質量によって表現された

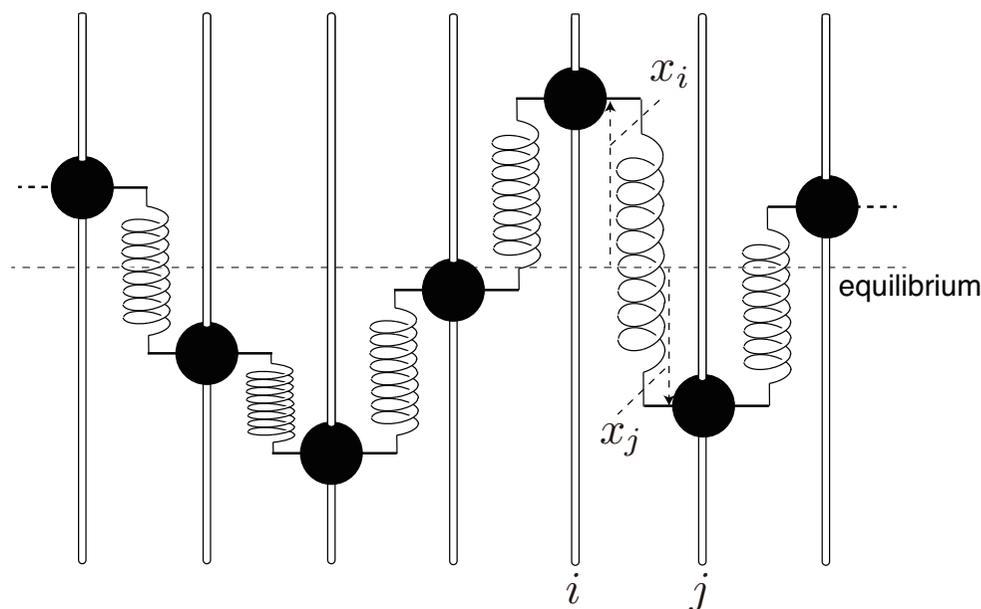
- Laplacian 行列  $\mathcal{L}_0$  の対称化の条件  $m_i w_{ij} = m_j w_{ji}$   
⇔ **Newton の第三法則** (作用・反作用の法則) に対応
- $y_i = \sqrt{m_i} x_i$ ,  $\mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n)$  を用いると, 運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} = -S_0 \mathbf{y}(t) \quad (2)$$

対称行列  $S_0 := M^{+1/2} \mathcal{L}_0 M^{-1/2}$  を用いてダイナミクスを記述可能

## 対称化可能な有向グラフ上のユーザダイナミクス (2)

- ユーザアクティビティの運動方程式はネットワーク上の振動モデルとして解釈できる.



- ノード  $i$  の状態  $x_i$  は, 平衡状態からの変位を表し, その復元力は隣接ノードとの変位の差に比例
- ノード  $i-j$  間のバネ係数は  $k_{ij} := m_i w_{ij}$ , ノード  $i$  の質量は  $m_i$ .
- 上図は一次元ネットワークを表現しているが, 任意のネットワークトポロジーでモデル化可能

# 対称化可能な有向グラフ上の振動ダイナミクスの解

- $S_0$  の固有値を昇順に並べる:  $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$
- $\lambda_\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ ) に属する固有ベクトル  $\mathbf{v}_\mu$  は固有基底を張るように選ぶことができる (ここで  $\delta_{\mu\nu}$  は Kronecker delta).

$$S_0 \mathbf{v}_\mu = \lambda_\mu \mathbf{v}_\mu, \quad \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu = \delta_{\mu\nu}$$

- $\mathbf{y}(t)$  を固有基底で展開  $\mathbf{y}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu(t) \mathbf{v}_\mu$  して運動方程式に代入し, 展開係数 (振動モード) 毎の運動方程式を抜き出すと

$$\frac{d^2 a_\mu(t)}{dt^2} = -\lambda_\mu a_\mu(t)$$

- 振動モード毎の解は,  $n$  個の独立な調和振動子 (普通の振り子)

$$a_\mu(t) = a_\mu(0) e^{\pm i \omega_\mu t} \quad (3)$$

ここで  $\omega_\mu = \sqrt{\lambda_\mu}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ .

- 振動モード毎の振動に完全に分離されており, ネット炎上のような非自明な現象も起こらない.

# ノードの振動エネルギーとノード中心性

- 振動モデルと現実のネットワークダイナミクスの関係は何か？
- ノードの振動エネルギー (ここで,  $\mathbf{v}_\mu = {}^t(v_\mu(1), \dots, v_\mu(n))$ )

$$\begin{aligned} E_i &:= \frac{1}{2} m_i \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu^2 |x_i(t)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu^2 |y_i(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu^2 |a_\mu(t)|^2 (v_\mu(i))^2 \end{aligned}$$

- 特別な場合のノードの振動エネルギー (以下の例は無向グラフ)
  - 初期条件がランダム & リンクの重み 1  $\Rightarrow E_i$  は 次数中心性
  - 初期条件をランダム & リンクの重みが最短経路の通過数  $\Rightarrow E_i$  は 媒介中心性 + 定数
- 多様な初期条件やリンクの重みを与えることで, ノード中心性の拡張が可能. ノード中心性の時間変化を考えることも可能.
- ノード質量と PageRank も関係あり.

# ネットワーク上の減衰振動

- ネットワーク上の減衰振動 ( $\gamma > 0$  は減衰係数) の運動方程式:

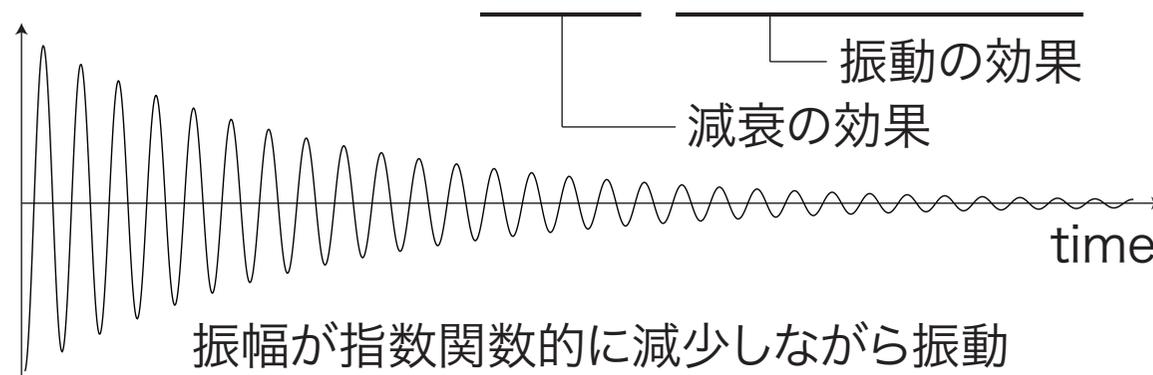
$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = -\mathbf{S}_0 \mathbf{y}(t) \quad (4)$$

- $\mathbf{S}_0$  の固有基底で展開した振動モード毎の運動方程式:

$$\frac{d^2 a_\mu(t)}{dt^2} + \gamma \frac{da_\mu(t)}{dt} + \omega_\mu^2 a_\mu(t) = 0 \quad (5)$$

- $(\gamma/2)^2 < \omega_\mu^2$  の場合, **減衰振動**:

$$a_\mu(t) = a_\mu(0) e^{-(\gamma/2)t} e^{\pm i\sqrt{\omega_\mu^2 - (\gamma/2)^2} t} \quad (6)$$



# 一般の有向グラフ上の振動モデル

- 一般の有向グラフ上に拡張した振動モデルの運動方程式 ( $\gamma \geq 0$ ) :

$$\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I) \mathbf{x}(t) = -\mathcal{L} \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

- $\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}^{+1/2} \mathbf{x}(t)$  として行列  $\mathbf{S} := \mathbf{M}^{+1/2} \mathcal{L} \mathbf{M}^{-1/2}$  で記述

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = -(\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_I) \mathbf{y}(t) = -\mathbf{S} \mathbf{y}(t) \quad (8)$$

- Newton の第三法則が不成立, **バネのモデルの表現ができない**.  
⇒ 現実世界の力学的な振動には対応しない, 仮想的世界の振動

**ネット炎上の定義** : ネットワークの振動エネルギーが時間とともに発散すること.

# 一般の有向グラフの Scaled Laplacian 行列 $S$ の特徴

	$S_0$	$S$
グラフ構造	対称化可能な有向グラフ	一般の有向グラフ
対角化	常に可能	対角化出来ない場合あり
固有値	常に実数	複素数になる場合あり
固有ベクトル	直交するように選べる	直交するとは限らない

- $S$  が対角化出来ない場合は、固有値が重複 (固有値方程式が重解).  
⇒ 工学ではリンクの重みは有効数字の誤差許容, 重解の回避は容易.  
⇒ 固有値の重複はなく  $S$  は常に対角化可能, と考えて良い
- 固有値が複素数となる影響 ⇒ ネット炎上に関連 (後述)
- 固有ベクトルが直交せず ⇒ 振動モードの結合
- $S$  の固有値を  $\bar{\lambda}_\mu$  とする ( $\mu = 0, 1, \dots, n - 1$ ).
- $\bar{\lambda}_\mu$  に属する固有ベクトルを  $\bar{v}_\mu$  とする (一次独立).

# ネット炎上のモデル (1)

- 減衰振動の解 (対称化可能グラフの場合, 固有値は実数 (非負)) (再掲)

$$a_\mu(t) = a_\mu(0) \exp\left[-\frac{\gamma}{2} t\right] \exp\left[\pm i \sqrt{\lambda_\mu - (\gamma/2)^2} t\right]$$

- 一般の有向グラフの場合も, 解を一次独立な固有ベクトルで展開

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \bar{a}_\mu(t) \bar{\mathbf{v}}_\mu$$

して振動モード  $\bar{a}_\mu(t)$  の解を求めることができる.

- 固有値  $\bar{\lambda}_\mu$  が一般に複素数なので,

$$r_\mu e^{i\theta_\mu} := \bar{\lambda}_\mu - (\gamma/2)^2$$

とすれば

$$\bar{a}_\mu(t) = \bar{a}_\mu(0) \exp\left[-\frac{\gamma}{2} t\right] \exp\left[\pm i \sqrt{r_\mu} e^{i\theta_\mu/2} t\right]$$

## ネット炎上のモデル (2)

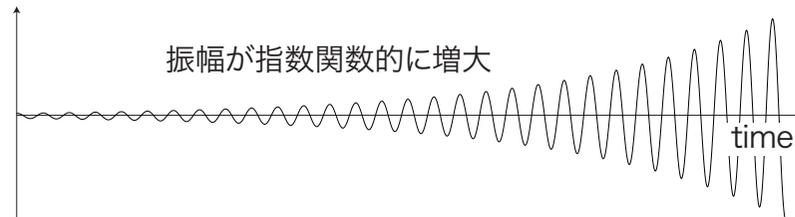
- 一般の有向グラフ上での減衰振動の解 (再掲)

$$\bar{a}_\mu(t) = \bar{a}_\mu(0) \exp\left[-\frac{\gamma}{2} t\right] \exp\left[\pm i \sqrt{r_\mu} e^{i\theta_\mu/2} t\right]$$

- $\sqrt{r_\mu} e^{i\theta_\mu/2} = \sqrt{r_\mu} \cos(\theta_\mu/2) + i \sqrt{r_\mu} \sin(\theta_\mu/2)$  を使うと

$$\begin{aligned} \bar{a}_\mu(t) = \bar{a}_\mu(0) \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{r_\mu} \sin\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right)\right) t\right] \\ \times \exp\left[\pm i \sqrt{r_\mu} \cos\left(\frac{\theta_\mu}{2}\right) t\right] \end{aligned} \quad (9)$$

- もし  $\sqrt{r_\mu} |\sin(\theta_\mu/2)| > \gamma/2$  なら時間と共に発散  $\Rightarrow$  ネット炎上



# 外国為替の裁定取引とのアナロジー

- ネットワーク = 「ポピュリズムの喧騒の増幅装置」？
- 有向リンクの構造から発散が生まれる原理の例え話
- 裁定機会の無い取引（対称化可能な有向グラフの例）
  - 簡単のため両替手数料無しで,  $100 \text{ 円} = \$ 1 = \text{€}1$  とする.
  - 「円  $\Rightarrow$  \$  $\Rightarrow$  €  $\Rightarrow$  円」と両替しても円は増えない.
  - 超円安になったとして,  $200 \text{ 円} = \$ 1 = \text{€}1$  とする.
  - 「円  $\Rightarrow$  \$  $\Rightarrow$  €  $\Rightarrow$  円」と両替してもやはり円は増えない.
- 裁定機会のある取引（対称化できない有向グラフの例）
  - 簡単のため両替手数料無しで  
 $100 \text{ 円} = \$ 1, \$ 1 = \text{€}1, \text{€}1 = 200 \text{ 円}$  とする.
  - 「円  $\Rightarrow$  \$  $\Rightarrow$  €  $\Rightarrow$  円」と両替するよ円は倍になる.
  - 「円  $\Rightarrow$  €  $\Rightarrow$  \$  $\Rightarrow$  円」と両替すると円は半減する.
- 実際の裁定機会では, ディーラーが利益を得るよう取引すると為替レートが変動し, 裁定機会が消失する.  
 $\Rightarrow$  ネットワークにも「為替レートの変動」に相当する操作が必要.

# ネット炎上の対策技術 (1)

- 発散の仕組みの理解は、ネット炎上の防止技術につながる
- $\mathcal{L}$  の固有値が全て実数  $\Rightarrow \gamma = 0$  であってもネット炎上が起きない。
- 有向グラフ  $\mathcal{G}(V, E)$  が対称化可能  $\Rightarrow \mathcal{L}$  の固有値が全て実数。  
 $\Rightarrow \mathcal{G}(V, E)$  を対称化可能に調整することでネット炎上を防止する。
  - ネットワーク上でノード  $i = i_1, i_2, \dots, i_k$  が閉路を構成しているとし、 $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1$  に沿った閉路のリンクの重みの積は、有向グラフが対称化可能  $m_i w_{ij} = m_j w_{ji}$  であれば

$$\begin{aligned} w_{i_1 i_2} w_{i_2 i_3} \cdots w_{i_k i_1} &= \frac{m_{i_2}}{m_{i_1}} w_{i_2 i_1} \frac{m_{i_3}}{m_{i_2}} w_{i_3 i_2} \cdots \frac{m_{i_1}}{m_{i_k}} w_{i_1 i_k} \\ &= w_{i_1 i_k} \cdots w_{i_3 i_2} w_{i_2 i_1} \end{aligned} \quad (10)$$

となるので、閉路の左右回りのリンクの重みの積が等しい。

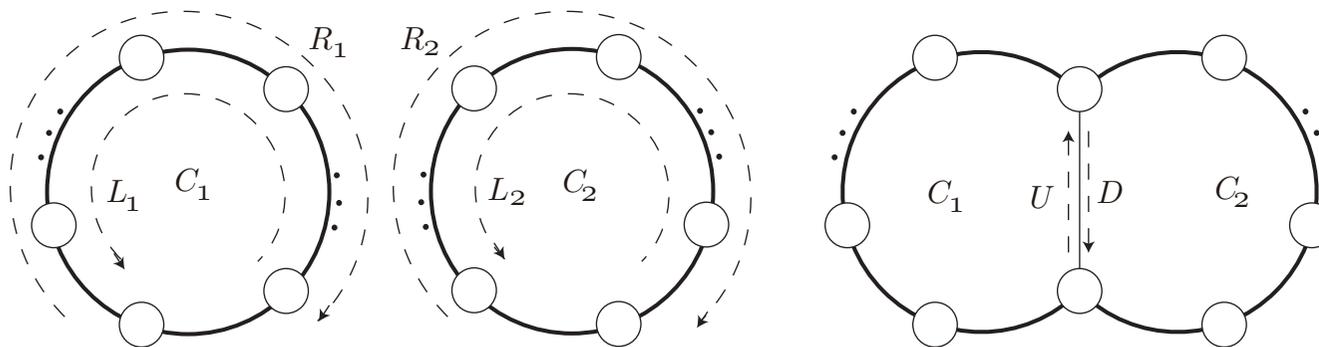
- 逆に、左右回りのリンクの重みの積等しいなら有向グラフを対称化する  $m_i$  を選ぶことができる。
- リンクの重みの調整は、閉路上のどのリンクに施しても良い。  
 $\Rightarrow$  この任意性が **Laplacian 行列の分解の自由度** と関連

## ネット炎上の対策技術 (2)

- 閉路  $C_1$  と  $C_2$  の左右回りのリンクの重みの積：  $L_1, R_1$  及び  $L_2, R_2$
- $C_1$  と  $C_2$  の共有部分のリンクの重みの上/下向き積：  $U, D$
- $C_1$  と  $C_2$  を結合した大きな閉路  $C_{1+2}$  の重みの積は、  $R_1 = L_1$  及び  $R_2 = L_2$  の条件の下で

$$\frac{R_1}{D} \frac{R_2}{U} = \frac{L_1}{U} \frac{L_2}{D} \quad (11)$$

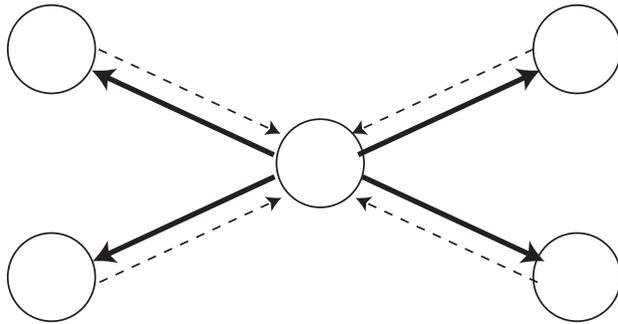
となるから、閉路  $C_{1+2}$  も左右回りのリンクの重みの積は等しい。



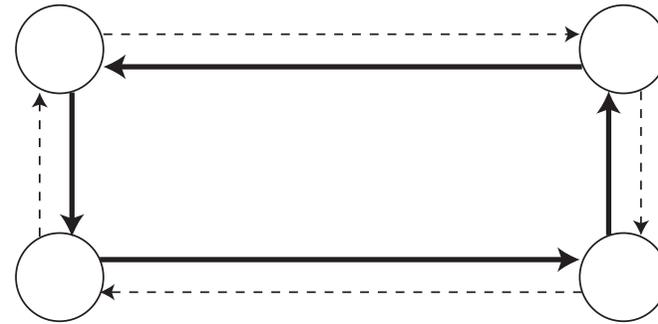
- このことから、調整する閉路は分割不可能な閉路のみで十分である。

# ネット炎上の発生メカニズムの理解に向けて

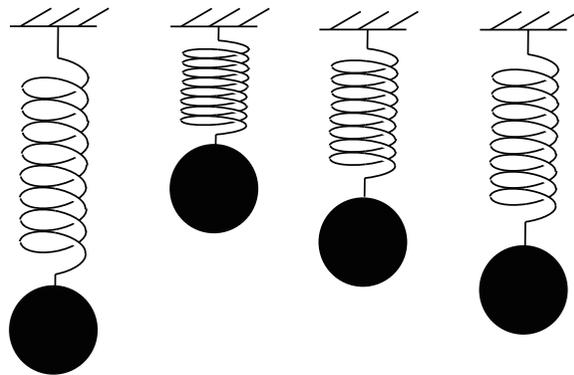
- 対称化可能な有向グラフ上の振動は，独立な調和振動子に分解可能
- 一般の有向グラフ上の振動は，振動子の間に何らかの作用が生じる。



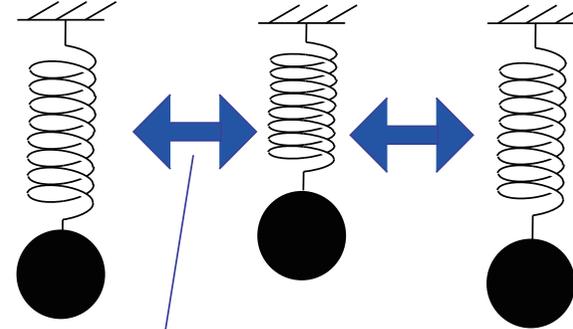
対称化可能な有向グラフ



一般の有向グラフ



独立な調和振動子に分解できる



独立な調和振動子とはならない  
どのような影響が働くのか？

# 対称化不可能なリンクの影響の分離 (1)

- 減衰の無い一般の有向グラフ上の波動方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} = -(\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_I) \mathbf{y}(t) = -\mathbf{S} \mathbf{y}(t)$$

- $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_I$  のうち、対称化不可能なネットワーク構造  $\mathbf{S}_I$  が、どのようなメカニズムによってネット炎上に結びつくのか？
- $\mathbf{S}_0$  を対角化するように  $\mathbf{\Lambda}_0 = {}^t \mathbf{P} \mathbf{S}_0 \mathbf{P}$  と変換した波動方程式

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\psi}(t)}{dt^2} = -(\mathbf{\Lambda}_0 + \mathbf{\Lambda}_I) \boldsymbol{\psi}(t)$$

- 但し、 $\mathbf{\Lambda}_0$  は  $\mathbf{S}_0$  を対角化した行列で、

$$\mathbf{\Lambda}_0 := \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$$

- それ以外の記号は  $\mathcal{L}_0$  の対角化に合わせて変換したもの。

$$\mathbf{\Lambda}_I := {}^t \mathbf{P} \mathbf{S}_I \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\psi}(t) := {}^t \mathbf{P} \mathbf{y}(t)$$

## 対称化不可能なリンクの影響の分離 (2)

- $\Lambda_0 = {}^t P S_0 P$  と対角化した波動方程式 (再掲)

$$\frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} = -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \psi(t) \quad (12)$$

- $\Lambda_I$  の影響 (つまり  $S_I$  の影響) を明示的に理解するためには,

$$\psi(t) = (\Lambda_0 \text{ の影響}) \times (\Lambda_I \text{ の影響})$$

のように解が積形式で与えられることが望ましい。

- まず,  $\Lambda_0$  からのみの影響を見るために, 以下の方程式を考える.

$$\frac{d^2 \phi_0(t)}{dt^2} = -\Lambda_0 \phi_0(t) \quad (13)$$

- 方程式 (13) の解  $\phi_0(t) = {}^t(\phi_0(0;t), \phi_0(1;t), \dots, \phi_0(n-1;t))$  に対して, この成分からなる対角行列を考える.

$$\Phi_0(t) := \text{diag}(\phi_0(0;t), \phi_0(1;t), \dots, \phi_0(n-1;t))$$

## 対称化不可能なリンクの影響の分離 (3)

- 次に,  $\Lambda_I$  からの影響を見るために, 以下の方程式を考える.

$$\frac{d^2 \phi_I(t)}{dt^2} = -(\Phi_0(-t) \Lambda_I \Phi_0(t)) \phi_I(t) \quad (14)$$

- ここで,  $\phi_I(t)$  の満たす方程式について

$$\frac{d^2 \phi_I(t)}{dt^2} = -\Lambda_I \phi_I(t)$$

とはしない理由は, 後の計算を実行すればすぐに分かる.

- 方程式 (14) の解を  $\phi_I(t) = {}^t(\phi_I(0; t), \phi_I(1; t), \dots, \phi_I(n-1; t))$  とするとき, 運動方程式 (12) の解  $\psi(t)$  が

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \Phi_0(t) \phi_I(t) \\ &= {}^t((\phi_0(0; t) \phi_I(0; t)), \dots, (\phi_0(n-1; t) \phi_I(n-1; t))) \end{aligned}$$

のように書けるかどうかポイント!!!

## 積形式解の具体的なイメージ

- $\phi_0(t) = {}^t(\phi_0(0;t), \phi_0(1;t), \dots, \phi_0(n-1;t))$  に対して,

$$\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} \phi_0(0;t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_0(1;t) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \phi_0(n-1;t) \end{pmatrix}$$

- 積形式解は

$$\psi(t) = \Phi_0(t) \phi_I(t) \quad (15)$$

- つまり,  $\phi_I(t) = {}^t(\phi_I(0;t), \phi_I(1;t), \dots, \phi_I(n-1;t))$  に対して

$$\psi(t) = \Phi_0(t) \phi_I(t) = \begin{pmatrix} \phi_0(0;t) \phi_I(0;t) \\ \phi_0(1;t) \phi_I(1;t) \\ \vdots \\ \phi_0(n-1;t) \phi_I(n-1;t) \end{pmatrix}$$

## 積形式解への試み (その1)

- 実際に  $\psi(t) = \Phi_0(t) \phi_I(t)$  を 運動方程式 (12) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} (\Phi_0(t) \phi_I(t)) \\ &= \frac{d^2\Phi_0(t)}{dt^2} \phi_I(t) + \Phi_0(t) \frac{d^2\phi_I(t)}{dt^2} + 2 \frac{d\Phi_0(t)}{dt} \frac{d\phi_I(t)}{dt} \\ &= -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \Phi_0(t) \phi_I(t) + 2 \frac{d\Phi_0(t)}{dt} \frac{d\phi_I(t)}{dt} \\ &\neq -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \Phi_0(t) \phi_I(t) = -\Lambda \psi(t)\end{aligned}\tag{16}$$

- 赤字で示した交差項の影響で、積形式解への試みがうまくいかない。
- ここで、式 (14) を用いて

$$\begin{aligned}\Phi_0(t) \frac{d^2\phi_I(t)}{dt^2} &= -\Phi_0(t) \Phi_0(-t) \Lambda_I \Phi_0(t) \phi_I(t) \\ &= -\Lambda_I \Phi_0(t) \phi_I(t)\end{aligned}$$

となることを使った。

## 原因の分析

- 積形式解への試みが失敗した原因 = 余計な交差項の出現  
⇒ 交差項の出現要因は、時間に関する二階微分の方程式だから
- $H^2 = \Lambda_0 + \Lambda_I$  を満たす線形作用素  $H$  の存在を仮定し時間に関して一階微分の以下の時間発展方程式を考える.

$$\pm i \frac{d\psi(t)}{dt} = H \psi(t) \quad (17)$$

- 時間発展方程式 (17) の解は

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \mp i H \frac{d\psi(t)}{dt} = -H^2 \psi(t) = -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \psi(t)$$

より、元の方程式 (12) の解にもなっている.

- 元の方程式 (12) を解く代わりに、時間発展方程式 (17) を解いて良い!!!

## 積形式解への試み (その2)

- 更に, 積形式解の可能性については以下のように確認できる.
  - まず,  $H_0 := \Lambda_0^{1/2}$  として  $H$  の分解を考える.

$$H = H_0 + H_I \quad (18)$$

- また, 解  $\psi(t)$  の積形式解として以下の関数形を仮定する.

$$\psi(t) = \Psi_0(t) \psi_I(t) \quad (19)$$

- 但し, 式 (18), (19) に現れる関数は, 以下の方程式

$$\pm i \frac{d}{dt} \psi_0(t) = H_0 \psi_0(t) \quad (20)$$

$$\pm i \frac{d}{dt} \psi_I(t) = \Psi_0(-t) H_I \Psi_0(t) \psi_I(t) \quad (21)$$

を満たすベクトル  $\psi_0(t)$ ,  $\psi_I(t)$ , 及び  $\Psi_0(t)$  はベクトル  $\psi_0(t)$  の成分を対角成分に持つ対角行列である.

## 積形式解への試み (その 2) (続き)

- 積形式解の確認
  - 式 (17) に式 (19) を代入すると,

$$\begin{aligned}\pm i \frac{d\psi(t)}{dt} &= \pm i \frac{d}{dt} (\Psi_0(t) \psi_I(t)) \\ &= \mathbf{H}_0 \Psi_0(t) \psi_I(t) + \Psi_0(t) (\Psi_0(-t) \mathbf{H}_I \Psi_0(t)) \psi_I(t) \\ &= (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_I) \psi(t) = \mathbf{H} \psi(t)\end{aligned}$$

となり, 積形式解への試み (19) が成功することが分かる.

- $t = t_0$  での初期条件を  $\Psi_0(t_0) = \mathbf{I}$  (単位行列) として  $\Psi_0(t)$  を解けば

$$\Psi_0(t) = \exp(\mp i \Lambda_0^{1/2} (t - t_0)) \quad (22)$$

- 解  $\psi(t)$  は以下のように書ける.

$$\psi(t) = \exp(\mp i \Lambda_0^{1/2} (t - t_0)) \psi_I(t) \quad (23)$$

- このように, 時間発展方程式 (17) は有向グラフ上の振動現象を理解するための基礎方程式である.

# 量子論との関係

- 基礎方程式

$$\pm i \frac{d\psi(t)}{dt} = \mathbf{H} \psi(t)$$

は、物理定数  $\hbar$  などを無視すれば、形式的には相対論的量子力学に現れる Dirac 方程式と同じ。

- 量子論とは、原子、電子、光子などのミクロな世界を記述する物理理論。一方、基礎方程式は対称化出来ない有向グラフの影響を考慮した複雑な振動現象の絡み合いを、因果関係を明示して理解するために到達したもの。  
⇒ 量子論的な方程式は決してミクロな世界を記述するための特別な枠組みなのではなく、**振動現象の因果関係を理解するための一つの「モノの見方」**である、と解釈可能
- 量子論との違い： $\mathbf{H}$  が Hermite 作用素とは限らない (ネット炎上などエネルギー保存則を破る)、有限次元 (量子論は無数個の振動子)

# ネットワーク上の振動モデルの今後の展開

- ネット炎上防止技術への展開
  - Laplacian 行列の分解の多様性を利用し、ネットワーク制御を実施し易いリンクを制御対象として分離する技術.
  - 減衰の強さを制御することによるネット炎上防止技術.
- ネット炎上の発生メカニズムの理解
  - 固有値が複素数となるネットワーク的なメカニズムの分析.
  - 固有値が縮退する場合のネット炎上メカニズムの解明.
- ネット炎上以外の一般のネットワークダイナミクスへの適用
  - ソーシャルメディアネットワークなど通信関連のダイナミクス分析.
  - 電力網など通信ネットワーク以外のダイナミクスの分析.

## まとめ

- 一般の有向グラフ = 対称化可能な有向グラフ + 一方向リンクグラフ
- ネットワーク上の振動モデルは, 振動エネルギーによってノード中心性の拡張が可能.
- Newton の第三法則が成り立たない**振動モデルの拡張**を考えると, Laplacian 行列の固有値が複素数になることによって振動モードが発散する場合があります.
- この発散はネットワーク自身から発生するもので, ノード中心性 (ノードの働きの強さ) の発散 (ネット炎上) となる.  
⇒ ネットワーク構造とネット炎上の関係についての考察が可能
- このモデルに基づいたネット炎上対策技術の検討が可能である.
- ネット炎上の発生メカニズムを**因果関係**を可視化してモデル化すると, **量子論**に通じる.
- 関連の解説資料を受付に置いているので, 興味があればぜひご覧ください. (電子情報通信学会創立 100 周年記念懸賞論文優秀賞受賞)