

招待講演

ノード間の非対称相互作用によって生ずる ネットワーク上の振動ダイナミクスの モデル化と応用

会田 雅樹

首都大学東京

March 3, 2016

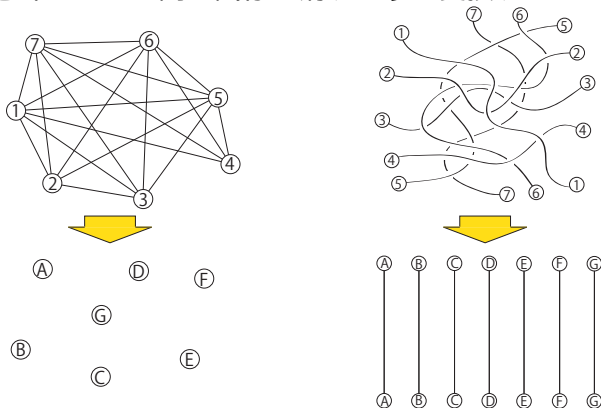
背景 & 本研究の目的

- 情報ネットワークの発展によって社会ネットワークにおける情報交換のあり方が活性化。
⇒ そこから生みだされる多様なダイナミクスは興味深い研究対象。
- ネットワークダイナミクスを生みしている **ノード間の相互作用は、一般に非対称**。
- 非対称のネットワーク構造は **有向グラフ** として **非対称行列** で表現されることが多い。
- 一方で、対称行列によるネットワークダイナミクスのモデル化は、数学的に分析が容易。
- ある種の非対称なノード間相互作用は、**対称なラプラシアン行列** を用いて分析可能。

研究目的：**非対称なノード間相互作用によって生み出される振動ダイナミクスのモデル化と解析，及びその応用例の考察**

対称行列によるモデル化の利点

- 実対称行列は**対角化**することができる。
- 対角化の意味：ノード間の関係を消すように変換することが可能。



- 対角化のメリット：ネットワークダイナミクスを**ノード毎に分解して分析**することが可能。

行列によるグラフ構造の表現

- n 個のノード $\{1, 2, \dots, n\}$ からなる有向グラフ $G = G(V, E)$ を考える . (但し , V はノードの集合 , E はリンクの集合)
- 隣接ノード i - j 間の有向リンク $i \rightarrow j$ の重みを $w_{ij} > 0$ とする .
- G の有向リンク (出リンク) の有無とその重みを表す $n \times n$ 正方行列 $A = [A_{ij}]$ を

$$A_{ij} := \begin{cases} w_{ij}, & (\text{有向リンク } i \rightarrow j \text{ があるとき}) \\ 0, & (\text{有向リンク } i \rightarrow j \text{ が無いとき}) \end{cases}$$

と定義し , (重み付き) 隣接行列という .

- 有向グラフの隣接行列 A は一般に非対称行列 .
- A は G の構造を代数的に調べることに利用可能 .
例) 全てのリンクの重みが $w_{ij} = 1$ のとき , A^k の (i, j) 成分はノード i からノード j に向かう長さ k の経路の数 .

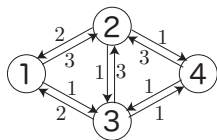
ラプラシアン行列の定義

- ノードを i ($i = 1, 2, \dots, n$) の重み付き出次数 d_i を定義 .

$$d_i := \sum_{j \in \partial i} w_{ij}$$

- 次数行列 $D := \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ としてラプラシアン行列 \mathcal{L} を定義 .

$$\mathcal{L} := D - A$$



$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

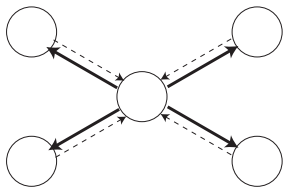
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

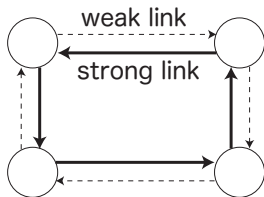
- 有向グラフのラプラシアン行列 \mathcal{L} は一般に非対称行列 .

リンクの非対称性の分類

- 典型的な非対称リンクの例



(a) hub type relation



(b) cyclic relation

- 左図の相互関係は、リンクの非対称性をノードの特性に還元可能。
⇒ ノード特性に還元することで、リンクの対称化が可能？
- 右図の巡回関係は、リンクの非対称性をノードの特性に還元することが出来ず、リンクの特性による表現が不可欠。
- 現実の情報ネットワークでは、左図の相互関係がしばしば現れる。
例) 人気ブロガーとそのフォロワー達の関係など

ラプラシアン行列の対称化 (1)

- もし \mathcal{L} に固有値 0 の左固有ベクトル

$${}^t m \mathcal{L} = 0$$

が存在し, ${}^t m = (m_1, \dots, m_n)$ の全ての成分が $m_i > 0$ で

$$m_i w_{ij} = m_j w_{ji} (\equiv k_{ij})$$

が成り立つとする (物理的意味は後述) .

- リンクの重みを $k_{ij} (= k_{ji})$ とした無向グラフ $G = G(V, E)$ 考え, G のラプラシアン行列 L を定義 .

$$L := D - A$$

$$\text{where } A_{ij} := \begin{cases} k_{ij}, & ((i, j) \in E) \\ 0, & ((i, j) \notin E) \end{cases}$$

$$D := \text{diag} \left(\sum_{j=1}^n k_{1j}, \sum_{j=1}^n k_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^n k_{nj} \right)$$

ラプラシアン行列の対称化 (2)

- 元の有向グラフのラプラシアン行列 \mathcal{L} は以下のように書ける .

$$\mathcal{L} = M^{-1} L$$

但し $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

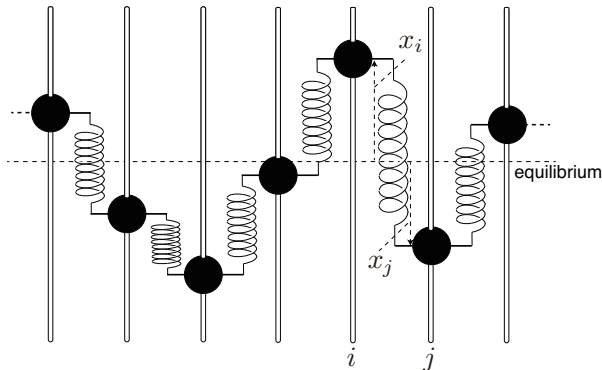
$$= \begin{bmatrix} 4 & -6/2 & -2/2 & 0 \\ -6/3 & 4 & -3/3 & -3/3 \\ -2/1 & -3/1 & 6 & -1/1 \\ 0 & -3/1 & -1/1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -6 & -2 & 0 \\ -6 & 12 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- スケーリングされたラプラシアン行列 S を定義 (S は対称行列) .

$$S := M^{-1/2} L M^{-1/2}$$

ネットワーク上の振動現象 (1)

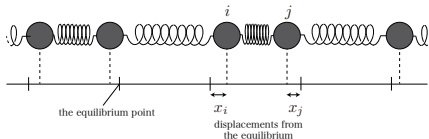
- ネットワークのノードが、隣接ノード同士で影響を与えながら振動するダイナミクスを考察する。



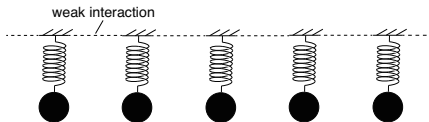
- ノード i の重み x_i は平衡状態からの変位だと考え、隣接ノードとの変位の差がバネのように復元力として働くシステムを考える。
- 図は一次元 NW として描いているが、一般の NW でも同様。

ネットワーク上の振動現象 (2)

- 一次元 NW に限定すれば縦波による図示も可能 .



- NW 上の結合振動子モデルとして有名な「蔵本モデル」との違い .



- 同じ性質の振動子が , リンクを介して弱い影響を与え合うモデル .
- 振動子 i の位相を $\theta_i(t)$, 固有角振動数を ω とすると

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \omega + \epsilon \sum_{j \in \partial i} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t))$$

により , 振動子の同期現象をモデル化 (ϵ は定数) .

ネットワーク上の振動現象 (3)

- リンクをバネとした振動モデルの妥当性
 - 隣接ノード間に働く影響力を表す関数 f を考える .
 - ノード i の状態量 x_i と隣接ノード j の状態量 x_j の差分 $\Delta x := x_i - x_j$ の関数 $f(\Delta x)$.
 - $\Delta x = 0$ のとき, ノード間の影響は無し, つまり $f(\Delta x) = 0$.
 - 全てのノードで隣接ノード間の状態が $\Delta x = 0$ のとき, ネットワークは安定状態 .
 - このとき, $f(\Delta x)$ を Taylor 展開することで

$$f(\Delta x) = -k_{ij} \Delta x + O(\Delta x^2)$$

- 定数項は 0 .
- k_{ij} は正の定数 .
- Δx が大きい時の非線形効果は $O(\Delta x^2)$ に現れる .
- 小さな Δx については f の詳細に依らずバネでモデル化可能 .

ネットワーク上の振動モデル (1)

- バネ係数をリンク毎に定義し, リンクの重み $k_{ij} > 0$ とする.
- ノードの質量をノード毎に定義し m_i とする.
- 結合振動子のシステムのハミルトニアン \mathcal{H} は,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &:= \sum_{i \in V} \frac{(p_i)^2}{2m_i} + \sum_{(i,j) \in E} \frac{k_{ij}}{2} (x_i - x_j)^2 \\ &= \sum_{i \in V} \frac{(p_i)^2}{2m_i} + \frac{1}{2} ({}^t \mathbf{x} L \mathbf{x})\end{aligned}$$

但し p_i はノード x_i の運動量. $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$.

- ハミルトニアンから正準運動方程式を導出

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\sum_{j \in V} L_{ij} x_j$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i}$$

ネットワーク上の振動モデル (2)

- 二つの式をまとめて p_i を消去すると

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -L \mathbf{x}(t)$$

- 左から M^{-1} をかけると, 非対称リンクのラプラシアン行列 \mathcal{L} で書ける.

$$\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -M^{-1} L \mathbf{x}(t) = -\mathcal{L} \mathbf{x}(t) \quad (1)$$

つまり, **リンクの非対称性はノードの質量**に還元して表現可能.

- \mathcal{L} を対称化できる条件 $m_i w_{ij} = m_j w_{ji}$ はニュートンの第三法則 (作用・反作用の法則) に対応.
- $y_i = \sqrt{m_i} x_i$, $\mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ を使って運動方程式を書き直せば,

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} = -S \mathbf{y}(t) \quad (2)$$

対称行列 S でリンクの非対称性を持つ振動ダイナミクスを表現可能.

S の固有値と固有ベクトル

- スケーリングされたラプラシアン行列 S の二次形式は

$${}^t \mathbf{y} S \mathbf{y} = \sum_{(i,j) \in E} k_{ij} \left(\frac{y_i}{m_i} - \frac{y_j}{\sqrt{m_i m_j}} \right)^2 \geq 0$$

だから, S の固有値は非負で最小固有値は 0 .

- S の固有値を小さい順に番号付け .

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$$

- S の固有値 λ_μ ($\mu = 0, 1, \dots, n-1$) に属する固有ベクトル \mathbf{v}_μ を固有基底になるように選ぶ . つまり ,

$$S \mathbf{v}_\mu = \lambda_\mu \mathbf{v}_\mu, \quad \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu = \delta_{\mu\nu}$$

ここで $\delta_{\mu\nu}$ はクロネッカーのデルタ .

NW 上の振動現象の解 (1)

- $\mathbf{y}(t)$ を S の固有基底で展開 $\mathbf{y}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu}(t) \mathbf{v}_{\mu}$ して運動方程式 (2) に代入すると

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{d^2 a_{\mu}(t)}{dt^2} \mathbf{v}_{\mu} = - \sum_{\mu=0}^{n-1} \lambda_{\mu} a_{\mu}(t) \mathbf{v}_{\mu}$$

- 振動モード毎の運動方程式を抜き出すと

$$\frac{d^2 a_{\mu}(t)}{dt^2} = -\lambda_{\mu} a_{\mu}(t)$$

- $a_{\mu}(t)$ について解くと

$$a_{\mu}(t) = c_{\mu} e^{i(\omega_{\mu} t + \theta_{\mu})} \quad (3)$$

ここで $\omega_{\mu} = \sqrt{\lambda_{\mu}}$, $i = \sqrt{-1}$, θ_{μ} は位相, c_{μ} は定数.

NW 上の振動現象の解 (2)

- 運動方程式 (2) の解は

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\mu} e^{i(\omega_{\mu} t + \theta_{\mu})} \mathbf{v}_{\mu} \quad (4)$$

- 元の運動方程式 (1) の解は

$$\mathbf{x}(t) = M^{-1/2} \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\mu} e^{i(\omega_{\mu} t + \theta_{\mu})} \mathbf{v}_{\mu} \right) \quad (5)$$

- 位相は運動方程式からは決まらない。
⇒ 位相が異なると, $\mathbf{x}(t)$ の振る舞いは大きく異なる。
- NW 上の振動現象はどのように現実のネットワークダイナミクスに関連するのか？

ノードの振動エネルギー

- NW 上の振動現象はどのように現実のネットワークダイナミクスに関連するのか？
⇒ ノード毎の働きの強さをノードの振動エネルギーで表現する。
- ノード i の振動エネルギー E_i は

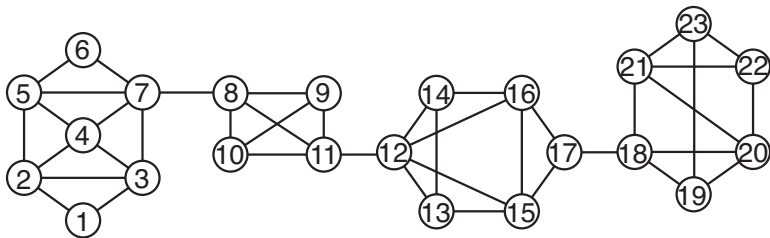
$$\begin{aligned} E_i &:= \frac{1}{2} m_i \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_{\mu}^2 |x_i(t)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_{\mu}^2 |y_i(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2} m_i \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_{\mu}^2 (A_{\mu})^2 (v_{\mu}(i))^2 \end{aligned}$$

- 但し ,

$$\begin{aligned} A_{\mu} &:= |a_{\mu}(t)| \\ \mathbf{v}_{\mu} &= {}^t(v_{\mu}(1), \dots, v_{\mu}(n)) \end{aligned}$$

ネットワークモデル

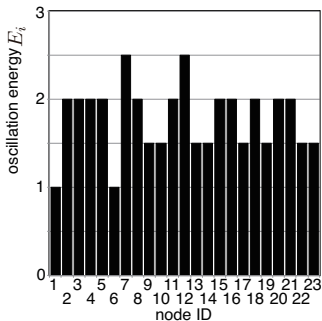
- 評価に利用するネットワークモデル .



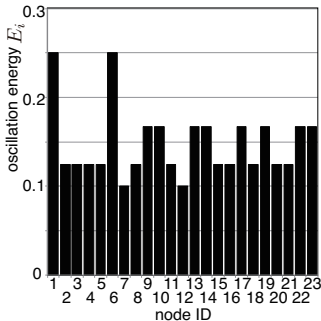
23 個のノードからなるネットワーク

- リンクの重みは 1 とした .

ノードの振動エネルギーとノード中心性 (1)



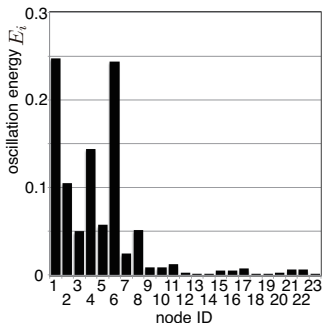
(a) $w_{ij} = 1, m_i = 1$



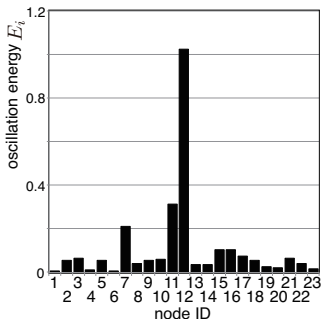
(b) $w_{ij} = 1, m_i = d_i^2$

- 全ての振動モードが同じ重みで寄与する場合の評価例 .
⇒ アクティビティのソースとなるノードがランダムな場合
- ノードの質量が等しい場合 (左) には振動エネルギーが次数中心性に比例 .
⇒ 振動現象とネットワーク指標が結びつく !

ノードの振動エネルギーとノード中心性 (2)



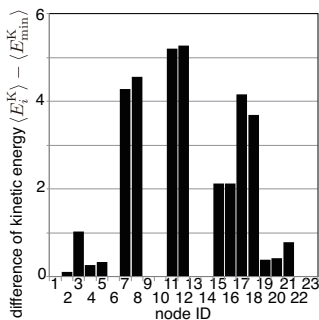
(a) source node = 1 ($m_i = 1$)



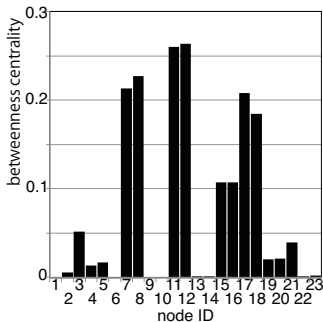
(b) source node = 12 ($m_i = 1$)

- 特定ノード 1 と 12 がアクティビティのソースとなった場合 .
- ノードの振動エネルギーは**次数中心性の拡張概念** (リンクの方向性, アクティビティのソースノード) .

ノードの振動エネルギーとノード中心性 (3)



(a) 運動エネルギーの最小値との差



(b) ノード毎の媒介中心性

- 最短経路の重み付きグラフでの運動エネルギー (左) と媒介中心性 (右) .
- リンクの重みを, ノード間の最短経路の通過数で与えて, 運動エネルギーを計算し, 最小値を引いたもの .
- 媒介中心性を再現することもできる .

NW 上の減衰振動 (1)

- NW 上の減衰振動の運動方程式

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} + \gamma M \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -L \mathbf{x}(t) \quad (6)$$

- S を用いて書き換えると

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = -S \mathbf{y}(t) \quad (7)$$

- S の固有ベクトルで展開して、振動モード毎の運動方程式を導出すると

$$\frac{d^2 a_\mu(t)}{dt^2} + \gamma \frac{da_\mu(t)}{dt} + \omega_\mu^2 a_\mu(t) = 0 \quad (8)$$

- $a_\mu(t) \propto e^{\alpha t}$ として特性方程式を求めると

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_\mu^2 = 0$$

特性方程式の解により、減衰振動の解が異なる。

NW 上の減衰振動 (2)

- 特性方程式の解は

$$\alpha = -(\gamma/2) \pm \sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_\mu^2}$$

- $(\gamma/2)^2 < \omega_\mu^2$ の場合は減衰振動

$$a_\mu(t) = c_\mu e^{-(\gamma/2)t} e^{i\sqrt{\omega_\mu^2 - (\gamma/2)^2}t + i\theta_\mu} \quad (9)$$

但し c_μ, θ_μ は定数 .

- $(\gamma/2)^2 = \omega_\mu^2$ の場合は臨界減衰

$$a_\mu(t) = (a_\mu(0) + c_\mu t) e^{-(\gamma/2)t} \quad (10)$$

但し c_μ は定数 .

- $(\gamma/2)^2 > \omega_\mu^2$ の場合は過減衰

$$a_\mu(t) = c_\mu^{(1)} e^{\alpha_+ t} + c_\mu^{(2)} e^{\alpha_- t} \quad (11)$$

但し, α_+ と α_- は特性方程式の解 (共に負) で, $c_\mu^{(1)}$ と $c_\mu^{(2)}$ は定数 .

ノードの運動エネルギー

- 減衰振動は時間とともに振動エネルギーが散逸するので、時間に依存する尺度が必要。

⇒ ノードの運動エネルギーを考える。

$$\begin{aligned} E_i^{(K)} &:= \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{dx_i(t)}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{dy_i(t)}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{da_{\mu}(t)}{dt} v_{\mu}(i) \right)^2 \end{aligned}$$

- アクティビティの伝播に対応したノードの働きを定量化可能。
- 減衰があっても、運動エネルギーの時間平均は次数中心性に対応。より詳細な報告は...
 - 高野, 会田, “ネットワーク上の振動ダイナミクスに基づく新しいノード中心性指標,” 2016年3月CQ研究会。

NW 上の強制振動

- NW 上の特定ノード j に角振動数 ω で強さ F の強制振動を入力

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \gamma M \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + L \mathbf{x}(t) = (F \cos \omega t) \mathbf{1}_{\{j\}} \quad (12)$$

ここで $\mathbf{1}_{\{j\}} = {}^t(0, \dots, 0, \underset{j}{\underset{\vee}{1}}, 0, \dots, 0)$.

- $\mathbf{y} = M^{1/2} \mathbf{x}$ を用いて運動方程式を書き換えると

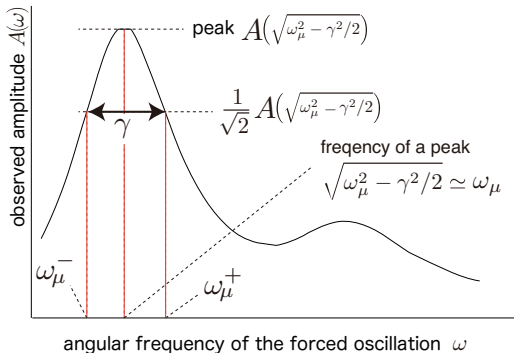
$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + S \mathbf{y}(t) = \frac{F \cos \omega t}{\sqrt{m_j}} \mathbf{1}_{\{j\}} \quad (13)$$

- 振動モード毎の解を $a_\mu(\omega, t) = A_\mu(\omega) \cos(\omega t + \theta_\mu)$ としたとき

$$A_\mu(\omega) = \frac{F b_\mu}{\sqrt{m_j}} \frac{1}{\sqrt{(\omega_\mu^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}}, \quad \tan \theta_\mu = \frac{\gamma \omega}{\omega_\mu^2 - \omega^2} \quad (14)$$

ネットワーク共鳴法のコンセプト

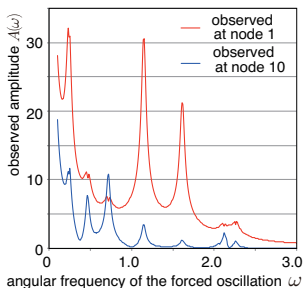
- 強制振動の ω が固有振動数 ω_μ に近いと、振動の振幅が大きくなる (共鳴現象) .



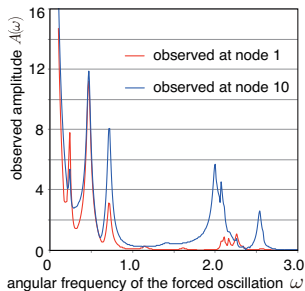
- 強制振動の ω に関する振幅の振る舞いを観測することで、固有振動数 ω_μ の推定 (即ち S の固有値の推定) や減衰の強さ γ の推定を行う。

ネットワーク共鳴法による振幅の評価例

- 23 ノードのネットワークモデルを用いて強制振動による振幅を評価 .



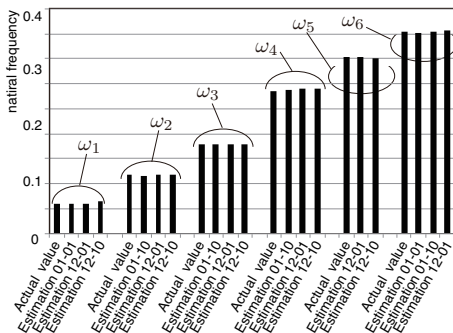
(a) observed amplitude (input node: 1)



(b) observed amplitude (input node: 12)

- 強制振動の入力ノードと観測ノードの組み合わせによっては、振幅のピークが観測できない場合がある .
- 組み合わせを変えることで問題を回避可能 .

ネットワーク共鳴法による固有振動数の推定



- 強制振動の入力ノードと観測ノードの組み合わせを適切に選べば、高い精度で S の固有値が推定可能．より詳細な報告は...
 - 古谷, 高野, 会田, “Laplacian 行列の固有値を推定するためのネットワーク共鳴法の提案,” 2016 年 3 月 IN 研究会．

ここまでのまとめ

- ある種のリンク非対称性はノードの特性に還元可能
 - 対称な行列 S を用いて振動ダイナミクスの分析が可能。
 - 振動ダイナミクスは、ノードの振動エネルギーを介してネットワーク指標に結びつく。
- 減衰振動への拡張とネットワーク指標の拡張
 - ノードの運動エネルギーにより、NW 上のアクティビティの伝播を反映した、時間に依存するネットワーク指標を得る。
 - ノードの運動エネルギーの時間平均により、ネットワーク指標に結びつく。⇒ **情報伝播のシチュエーションを考慮した次数中心性の拡張概念**。多様なノード中心性を与える。
- 強制振動への拡張とネットワーク共鳴法
 - 強制振動と共鳴を利用して、 S の固有値や減衰の強さを推定可能。
 - 具体的な強制振動は、株価情報やニュースなどの更新頻度など
 - S の固有値だけでなく固有ベクトルの推定に挑戦 ⇒ **固有値と固有ベクトルから S が再現可能となり、リンクの実効的な強さ等の NW の詳細情報がわかる。**

非対称ラプラシアン行列の分解

- 対称な S で記述可能な振動ダイナミクスは，振動モード毎に分解して扱える．
⇒ 取り扱いは容易だが，以下の様な興味深い現象は記述できない．
 - 同じ振動数を持つ振動モードが結合し，同期現象などが起こる．
 - 異なる振動数の振動モード間の結合が起こり，小さな時間や空間のスケールの現象がスケールを超えて影響がマクロに顕在化する．
- S を非対称行列に一般化し，対称部分 S_0 とそれ以外 S_I に分解．

$$\begin{aligned} S &= M^{+1/2} \mathcal{L} M^{-1/2} \\ &= M^{-1/2} L_0 M^{-1/2} + M^{-1/2} L_I M^{-1/2} \\ &= S_0 + S_I \end{aligned}$$

ここまでの例では， $S = S_0$ ， $S_I = O$ を扱っていた．

- 以下の運動方程式を検討する．

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{y}(t) = -(S_0 + S_I) \mathbf{y}(t) \quad (15)$$

非対称な S による運動方程式 (1)

- モード間の関係を明示的に見るために, S_0 を対角化して表示する.
 - S_0 の固有値を小さい順から

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$$

とし, 固有値 λ_μ に対応する固有基底を v_μ とする.

- 直交行列 $P = (v_0, \dots, v_{n-1})$ を用いて S_0 を対角化する.

$$\Lambda_0 := {}^t P S_0 P$$

- $\Psi(t) := {}^t P \mathbf{y}(t)$, $\Lambda_I = {}^t P S_I P$ とする.
- S_0 を対角化して運動方程式 (15) を書き換えると

$$\frac{d^2 \Psi(t)}{dt^2} = -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \Psi(t) \quad (16)$$

- ここからの方針: モード間結合の無い場合を基本として, モード間結合の影響をなるべく分離して取り扱いたい.

非対称な S による運動方程式 (2)

- 解の形を以下のように仮定し，分離を試してみる (I は単位行列) .

$$\Psi(t) = \phi_0(t) \phi_I(t) \quad (:= {}^t\phi_0(t) I \phi_I(t))$$

但し $d^2\phi_0(t)/dt^2 = -\Lambda_0 \phi_0(t)$,

$$d^2\phi_I(t)/dt^2 = -(\phi_0(-t) \Lambda_I \phi_0(t)) \phi_I(t) .$$

- $\Psi(t) = \phi_0(t) \phi_I(t)$ を代入すると，分離が成功しないことが分かる .

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi(t)}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} \phi_0(t) \phi_I(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi_0(t)}{dt} \phi_I(t) + \phi_0(t) \frac{d\phi_I(t)}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2\phi_0(t)}{dt^2} \phi_I(t) + \phi_0(t) \frac{d^2\phi_I(t)}{dt^2} + 2 \frac{d\phi_0(t)}{dt} \frac{d\phi_I(t)}{dt} \\ &= -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \phi_0(t) \phi_I(t) + 2 \frac{d\phi_0(t)}{dt} \frac{d\phi_I(t)}{dt} \\ &= -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \Psi(t) + 2 \frac{d\phi_0(t)}{dt} \frac{d\phi_I(t)}{dt} \\ &\neq -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \Psi(t) \end{aligned}$$

非対称な S による運動方程式 (3)

- 失敗の原因分析：時間に関する 2 階の微分方程式だから余計な cross term が出現 .
- 今後の方針
 - 時間に関して 1 階微分の方程式が必要 .
 - $H^2 = \Lambda_0 + \Lambda_I$ となる時間発展作用素 H があれば ,

$$i \frac{d\Psi(t)}{dt} = H \Psi(t) \quad (17)$$

と時間に関して 1 階微分の方程式で書ける .

(形式的に自然単位系 $\hbar = 1$ とした Schrödinger 方程式と同様の表現) .

- 元の運動方程式との関係は , $\Psi(t)$ が (17) の解なら , 元の方程式 (16) の解でもある .

$$\frac{d^2\Psi(t)}{dt^2} = -i H \frac{d}{dt} \Psi(t) = -H^2 \Psi(t) = -(\Lambda_0 + \Lambda_I) \Psi(t) \quad (18)$$

- $\Lambda_0 + \Lambda_I$ の分解で $d^2\phi_I(t)/dt^2$ が複雑化したので , 時間発展作用素 H の以下の分解は避ける .

$$H = \Lambda_0^{1/2} + H_I = \Omega + H_I$$

非対称な S による運動方程式 (4)

- 時間発展作用素 H を以下のように分離する .

$$H = \Lambda_0^{1/2} + \psi_0(t) H_I \psi_0(-t) = \Omega + \psi_0(t) H_I \psi_0(-t)$$

- 運動方程式 (16) の解 $\Psi(t)$ を以下のように分解する .

$$\Psi(t) = \psi_0(t) \psi_I(t) \quad (:= {}^t\psi_0(t) I \psi_I(t))$$

- 但し ,

$$i \frac{d}{dt} \psi_0(t) = \Omega \psi_0(t), \quad i \frac{d}{dt} \psi_I(t) = H_I \psi_I(t)$$

- $\psi_0(t)$ を解いておく .

$$i \frac{d}{dt} \psi_0(t) = \Omega \psi_0(t),$$

$t = t_0$ の初期状態 $\psi_0(t_0) = 1$ として

$$\psi_0(t) = e^{-i\Omega(t-t_0)}$$

非対称な S による運動方程式 (5)

- 時間発展方程式 (17) に $\Psi(t) = \psi_0(t) \psi_I(t)$ を代入すると

$$\begin{aligned} i \frac{d\Psi(t)}{dt} &= i \frac{d}{dt} (\psi_0(t) \psi_I(t)) \\ &= \Omega \psi_0(t) \psi_I(t) + \psi_0(t) H_I \psi_I(t) \\ &= \Omega \psi_0(t) \psi_I(t) + \psi_0(t) H_I \psi_0(-t) \psi_0(t) \psi_I(t) \\ &= (\Omega + \psi_0(t) H_I \psi_0(-t)) \psi_0(t) \psi_I(t) \\ &= H \Psi(t) \end{aligned}$$

- 時間依存性の一部 (モード間結合の無い部分) が時間発展作用素の中に入る . (H_I と $\psi_0(t)$ が可換でない (つまり H_I と Ω が可換でない)) ラプラシアン行列が時間依存)
- 時間発展方程式 (17) の解は , $\Psi(t_0) = \psi_I(t_0)$ としたとき

$$\Psi(t) = e^{-i\Omega(t-t_0)} \psi_I(t)$$

NW 上の振動ダイナミクスを記述する基本方程式の提案

- ネットワーク上の振動ダイナミクスを記述する基本方程式

$$i \frac{d\Psi(t)}{dt} = (H_0 + U_t H_I U_t^\dagger) \Psi(t) \quad (19)$$

$$H_0 := \Omega$$

$$U_t := \psi_0(t) = e^{-i\Omega(t-t_0)}$$

$$\Psi(t) = U_t \psi_I(t) = \psi_0(t) \psi_I(t)$$

$$i \frac{d\psi_0(t)}{dt} = H_0 \psi_0(t), \quad i \frac{d\psi_I(t)}{dt} = H_I \psi_I(t)$$

— * — * — * — * — * — * — * — * — * — * — * — * — * —

- 以降では，縮退した振動モード間の結合を例に，基本方程式から導出される結果を示す．

H^2 は Laplacian 行列になるか？

- 以下の性質を持つ時間発展作用素 H が実際に作れるか？

$$H^2 = (\Omega + e^{-i\Omega(t-t_0)} H_I e^{i\Omega(t-t_0)})^2 = \Lambda_0 + \Lambda_I \quad (20)$$

- $H_I = H_I^{(d)} + H_I^{(a)}$ のように，対角行列 $H_I^{(d)}$ とそれ以外の非対角成分のみの行列 $H_I^{(a)}$ の和に分解する．
- 反交換関係を $\{A, B\} = AB + BA$ と表記すると，以下の様な特別な性質が成り立つように工夫すれば， H と Laplacian 行列の対応関係が分かりやすくなる．

$$\{\Omega, H_I\} = 0, \quad \{H_I^{(d)}, H_I^{(a)}\} = 0$$

- 具体的な対応関係は

$$H^2 = \Lambda_0 + e^{-i\Omega(t-t_0)} H_I^2 e^{i\Omega(t-t_0)}$$

$$H_I^2 = (H_I^{(d)})^2 - (H_I^{(a)})^2$$

Pauli 行列

- Pauli のスピン行列

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

- Pauli 行列の性質

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

つまり,

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \quad (i \neq j)$$

$$\sigma_i^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv E \quad (22)$$

- この性質を利用して, 反交換関係の実現と 2 乗したときに通常の数に戻る仕組みを構成したい.

縮退モード間結合を記述する基本方程式

- ネットワーク上の縮退モード間結合を記述する基本方程式

$$i \frac{d\hat{\Psi}(t)}{dt} = (\hat{H}_0 + \hat{U}_t \hat{H}_I \hat{U}_t^\dagger) \hat{\Psi}(t) \quad (23)$$

但し H は $2n \times 2n$ の正方行列． $\Psi(t)$ は $2n$ 成分の列ベクトル．

$$\hat{H}_0 := \Omega \otimes \sigma_3$$

$$\hat{H}_I := H_I^{(d)} \otimes \sigma_1 + i H_I^{(a)} \otimes \sigma_2$$

$$\hat{U}_t := \hat{\psi}_0(t) = e^{-i(\Omega \otimes \sigma_3)(t-t_0)}$$

$$\hat{\Psi}(t) = \hat{U}_t \hat{\psi}_I(t) = \hat{\psi}_0(t) \hat{\psi}_I(t)$$

$$i \frac{d\hat{\psi}_0(t)}{dt} = \hat{H}_0 \hat{\psi}_0(t), \quad i \frac{d\hat{\psi}_I(t)}{dt} = \hat{H}_I \hat{\psi}_I(t)$$

縮退モード間相互作用 (1)

- 例： ω で縮退した 3 状態間に片方向の巡回する作用を付加する。



- H_I の規約成分のみに注目して

$$H_I = \begin{bmatrix} d & ia & 0 \\ 0 & d & ia \\ ia & 0 & d \end{bmatrix}, \quad H_I = H_I^{(d)} + iH_I^{(a)} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 時間発展方程式 (但し $x := 2\omega(t - t_0)$ と略記)

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_1^\uparrow(t) \\ \Psi_1^\downarrow(t) \\ \Psi_2^\uparrow(t) \\ \Psi_2^\downarrow(t) \\ \Psi_3^\uparrow(t) \\ \Psi_3^\downarrow(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & de^{-ix} & 0 & ae^{-ix} & 0 & 0 \\ de^{+ix} & -\omega & -ae^{+ix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & de^{-ix} & 0 & ae^{-ix} \\ 0 & 0 & de^{+ix} & -\omega & -ae^{+ix} & 0 \\ 0 & ae^{-ix} & 0 & 0 & \omega & de^{-ix} \\ -ae^{+ix} & 0 & 0 & 0 & de^{+ix} & -\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^\uparrow(t) \\ \Psi_1^\downarrow(t) \\ \Psi_2^\uparrow(t) \\ \Psi_2^\downarrow(t) \\ \Psi_3^\uparrow(t) \\ \Psi_3^\downarrow(t) \end{bmatrix}$$

縮退モード間相互作用 (2)

- $\Psi_1^\uparrow(t)$, $\Psi_1^\downarrow(t)$ などの解を以下の形に置く .

$$\Psi_1^\uparrow(t) = e^{-i\theta_1^\uparrow(t)} = e^{-i\omega(t-t_0)+i\delta_1^\uparrow(t)}$$

$$\Psi_1^\downarrow(t) = e^{+i\theta_1^\downarrow(t)} = e^{+i\omega(t-t_0)+i\delta_1^\downarrow(t)}$$

- 時間発展方程式に代入すると ,

$$\frac{d\theta_1^\uparrow(t)}{dt} = \omega + d \cos(\delta_1^\downarrow(t) - \delta_1^\uparrow(t)) + a \cos(\delta_2^\downarrow(t) - \delta_1^\uparrow(t)) \quad (24)$$

$$\frac{d\theta_1^\downarrow(t)}{dt} = \omega - d \cos(\delta_1^\uparrow(t) - \delta_1^\downarrow(t)) + a \cos(\delta_2^\uparrow(t) - \delta_1^\downarrow(t)) \quad (25)$$

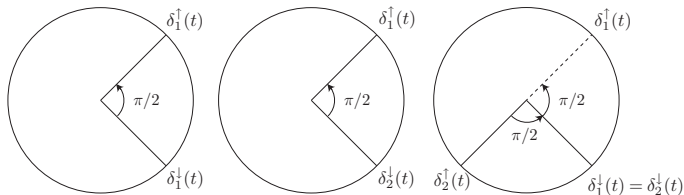
- $\cos(\theta) = -\sin(\theta - \pi/2)$, $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$ を使うと

$$\frac{d\theta_1^\uparrow(t)}{dt} = \omega + d \sin(\delta_1^\downarrow(t) - \delta_1^\uparrow(t) + \pi/2) + a \sin(\delta_2^\downarrow(t) - \delta_1^\uparrow(t) + \pi/2)$$

$$\frac{d\theta_1^\downarrow(t)}{dt} = \omega + d \sin(\delta_1^\uparrow(t) - \delta_1^\downarrow(t) - \pi/2) + a \sin(\delta_2^\uparrow(t) - \delta_1^\downarrow(t) + \pi/2)$$

縮退モード間相互作用 (3)

- $\pi/2$ だけずれて同期する蔵本モデルになっていることに注意 .
- 位相の関係 : 例えば $d > 0, a > 0$ なら ,



- $\delta_1^\uparrow(t)$ は $\delta_1^\downarrow(t)$ を介して $\delta_2^\uparrow(t)$ と逆位相で同期 .
- $\delta_1^\downarrow(t)$ は $\delta_1^\uparrow(t)$ を介して $\delta_2^\downarrow(t)$ と順位相で同期 .
- H^2 からは現れないスピンの構造が , 縮退モード間の同期に本質的な役割 .
- 自分自身と逆位相で打ち消し合わないためには , 縮退モード数が偶数であることが必要 ? .

全体のまとめ

- ネットワーク上でのアクティビティの伝播を記述するモデル
 - ノード間の非対称相互作用を対称化した振動モデルを提案．
 - ノードの運動エネルギーは既存のノード中心性を再現．
⇒ **提案振動モデルは既存のノード中心性の underlying mechanism .**
- ノードの活性度 (中心性) を計測することで、背後の振動現象を特定することは可能か？
 - ネットワーク共鳴法の提案．
 - 固有振動数は推定可能．
⇒ **固有ベクトルが分かれば、ラプラシアン行列が再現でき、背後のネットワーク構造が分かる．**
⇒ **直接観測できない未知のネットワーク構造の間接推定．**
例) ユーザネットワークの構造，
サイバー攻撃をする悪意ユーザのネットワーク構造，など
- 本質的に非対称なノード間相互作用への拡張
 - 時間に関して1階の基本方程式の提案．
 - 構造的に量子力学的な方程式に通じる．
⇒ **摂動法など、既に開発されている多くの計算手法が適用可能．**